

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ ИМ. В. П. ДЖЕЛЕПОВА

На правах рукописи



Аллахвердян Владимир Артурович

**Решение задач переноса электромагнитного излучения и
нейтрино при моделировании отклика нейтринного
телескопа**

Специальность 1.3.15 —

«физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Наумов Дмитрий Вадимович

Дубна — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	11
1.1 Эксперимент BaikalGVD	11
1.2 Астрофизика частиц	11
1.2.1 Спектр космических лучей	11
1.2.2 Модели происхождения нейтрино	13
1.2.3 Основные нейтринные астрофизические эксперименты	15
1.2.4 Спектр астрофизических нейтрино	15
1.2.5 Гипотетические источники	17
1.2.6 Современные результаты	19
Глава 2. Решение одномерной задачи переноса	22
2.1 Формулировка задачи	22
2.2 Решение системы уравнений	23
2.2.1 Сведение системы к уравнению Бесселя	25
2.3 Пространственные моменты	27
2.4 Сравнение аналитических результатов с методом Монте-Карло	30
2.5 Разложение Монте-Карло и Монте-Карло с повышенной сходимостью	31
2.6 Монте-Карло с повышенной сходимостью	40
2.7 Резюме	43
Глава 3. Трехмерное уравнение переноса излучения	45
3.1 Функция рассеяния	45
3.2 Итеративная схема решения трехмерного уравнения переноса	46
3.2.1 Общая формула	50
3.2.2 Дельтаобразный источник	51
3.2.3 Частные случаи	55
3.3 Наблюдаемый сигнал	57
3.4 Численное сравнение	60

	Стр.
3.4.1	Аппроксимация низших порядков 67
3.5	Эффект уширения спектра 67
3.6	Черенковское излучение 67
3.7	Свойства функции Хеньи-Гринштейна и решение интегральных уравнений с ядром в виде функции Хеньи-Гринштейна 70
3.7.1	Моменты функции Хеньи-Гринштейна 70
3.7.2	Преобразования функции Хеньи-Гринштейна 72
3.7.3	Обобщенные функции Хеньи-Гринштейна 73
3.8	Задача распространения света: средние значения 75
3.9	Резюме 83
Глава 4.	Нейтринный генератор NuPropagator 86
4.1	Метод Z-фактора 86
4.2	Структура NuPropagator 87
4.2.1	Пакет nudisxs 87
4.2.2	Программный пакет NuPropagator 89
4.3	Модель Земли и фактор подавления потока 91
4.4	Дважды дифференциальные сечения в NuPropagator 93
4.5	Нейтринные потоки 99
4.6	Розыгрыш кинематики 101
4.6.1	Сравнение с другими программными пакетами 104
4.7	Надежность партонной модели при ПэВ-энергиях 105
4.7.1	Области фазового пространства (x, Q^2) 105
4.7.2	Визуализация 2D-сечений с отсечками 105
4.8	Чувствительность к структуре Земли 107
4.8.1	Спектроскопия ядра Земли с нейтрино 107
4.8.2	Поглощение нейтрино в среде 110
4.8.3	Поглощение за счет нейтрального и заряженного токов . . 111
4.8.4	Томография Земли с помощью нейтрино 112
4.9	Резюме 117
Заключение 118

	Стр.
Список литературы	120
Список рисунков	125
Список таблиц	132
Приложение А. Приложение	133
A.1 Стандартная модель	133
A.1.1 Квантовая хромодинамика	134
A.1.2 Электрослабое взаимодействие	136
A.1.3 Взаимодействие нейтрино с нуклоном	137
A.1.4 Взаимодействие нейтрино с электроном	141
A.2 Пространственные моменты в одномерной задаче рассеяния	142
A.3 Различные разложения решения одномерного уравнения	144
A.4 Улучшенный метод МК	153
A.5 Вывод выражения для якобиана перехода	156
A.6 Вероятностный вывод решения	158
A.7 Свойства функции Хеньи-Гринштейна	160
A.7.1 Обобщение функции Хеньи-Гринштейна	160
A.7.2 Трехмерный случай	162
A.7.3 Производящие ряды для функции Хеньи-Гринштейна	165
A.8 Решения трехмерной задачи для изотропного случая	166
A.9 Итерационная схема для численного расчета	167
A.10 Средние значения переменных для трехмерной задачи переноса	171
A.11 Двумерная задача переноса	180
A.12 Многомерная задача переноса	181
A.13 Симметрии в трехмерной задаче переноса	182
A.14 Z-факторный метод для задачи переноса	184
A.15 Приближенные формулы для интегрального потока	189

Введение

Современная астрофизика вступила в эпоху многоканальных наблюдений, когда космические явления изучаются одновременно в электромагнитном, гравитационном и нейтринном каналах. Среди этих сигналов именно нейтрино высоких энергий обладают уникальной проникающей способностью и позволяют напрямую исследовать процессы в экстремальных астрофизических источниках — активных галактических ядрах, пульсарах, гамма-всплесках и при слияниях компактных объектов. Их регистрация открывает возможность локализовать источники космических лучей и проверить механизмы ускорения частиц в областях с экстремальными полями и плотностями. Для детектирования таких нейтрино используются крупномасштабные подлёдные и подводные телескопы: IceCube на Южном полюсе [1], KM3NeT в Средиземном море [2] и Baikal-GVD в озере Байкал [3]. В Китае и Канаде ведутся работы по проектам новых нейтринных телескопов. Совместная работа этих установок обеспечивает покрытие всего небесного свода и делает возможным развитие нейтринной астрономии в рамках многоканального подхода. Среди них Baikal-GVD является крупнейшим действующим нейтринным телескопом северного полушария, играющим ключевую роль в наблюдении северного неба и обеспечении кросс-валидации событий наблюдаемых другими нейтринными телескопами.

Для корректной интерпретации данных нейтринных телескопов необходимо детальное моделирование отклика установки на различные источники сигналов. При этом особую значимость приобретают задачи распространения нейтрино сквозь вещество и переноса черенковского излучения в среде детектора. Актуальность задачи моделирования транспорта нейтрино обусловлена необходимостью учёта поглощения и регенерации нейтринного потока за счёт взаимодействий по каналу нейтрального тока, что существенно влияет на форму и интенсивность регистрируемого спектра. Актуальность задачи распространения черенковского излучения связана с разреженностью пространственной структуры нейтринного телескопа, из-за чего традиционные методы Монте-Карло моделирования оказываются недостаточно эффективными и требуют замены на более быстрые и точные алгоритмы решения уравнений переноса излучения.

Целью работы является решение физических задач переноса нейтрино и электромагнитного излучения, возникающих при моделировании процессов в нейтринных телескопах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить аналитическое и численное решение уравнения переноса электромагнитного излучения в однородной рассеивающей среде.
2. Исследовать распространение нейтрино высоких энергий сквозь вещество с учётом взаимодействий по каналу нейтрального тока и регенерации нейтринного потока.
3. Вычислить ожидаемые потоки нейтрино в нейтринном телескопе как функцию энергии и зенитного угла прилёта, с учётом поглощения и регенерации при прохождении сквозь Землю.
4. Оценить чувствительность нейтринных телескопов к структуре Земли на основе анализа ослабления и регенерации нейтринных потоков.

Научная новизна:

1. Получено аналитическое решение уравнения переноса излучения в однородной рассеивающей среде в виде ряда по количеству рассеяний.
2. Выведены аналитические выражения для первых двух порядков рассеяния и получены приближения для предельных режимов переноса и диффузии.
3. Получены формулы для средних значений и корреляций координат и направлений в задаче переноса света, что позволило аналитически описать переход от баллистического к диффузионному режиму.
4. Реализовано физически обоснованное описание распространения нейтрино высоких энергий сквозь вещество с учётом взаимодействий по каналу нейтрального тока и эффекта регенерации нейтринного потока.
5. Выполнены расчёты нейтринных потоков в зависимости от энергии и зенитного угла прилёта с использованием современных партонных функций распределения.
6. Исследовано влияние неопределённостей партонных функций и их экстраполяций на полные сечения взаимодействия нейтрино.
7. Проведена валидация полученных результатов сравнением с экспериментальными данными и независимыми расчётами `nuFATE`.

8. На основе статистического анализа нейтринных потоков продемонстрирована возможность зондирования внутренней структуры Земли методом нейтринной томографии.

Практическая значимость работы состоит:

1. в развитии методов моделирования процессов, определяющих отклик нейтринных телескопов на сигналы различной природы, и их программной реализации;
2. в создании и применении набора специализированных инструментов, обеспечивающих эффективное моделирование физических процессов:
 - программного модуля **RTE**, реализующего аналитические решения уравнения переноса излучения в рассеивающих средах, что позволяет существенно ускорить расчёт распространения черенковского света по сравнению с традиционными методами Монте–Карло;
 - программного пакета **nudisxs**, предназначенного для вычисления глубоко-неупругих сечений взаимодействия нейтрино и антинейтрино с нуклонами на основе современных партонных функций распределения;
 - программного модуля **nupropagator**, реализующего транспорт нейтрино высоких энергий сквозь вещество с учётом взаимодействий по каналу нейтрального тока и эффекта регенерации потока.
3. в применении разработанных подходов для повышения точности и скорости моделирования отклика нейтринных телескопов, в частности установки Baikal–GVD;
4. в использовании полученных результатов для задач нейтринной томографии Земли и анализа распределения плотности её внутренних слоёв.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач использовались следующие методы:

1. аналитические методы теории возмущений для решения интегро-дифференциального уравнения переноса электромагнитного излучения;
2. методы квантовой теории поля для описания взаимодействий нейтрино с веществом;
3. численные методы решения уравнений переноса и обработки моделируемых данных;

4. метод Z -фактора для расчёта транспорта нейтрино сквозь вещество;
5. современные методы модульного программирования для реализации вычислительных алгоритмов;
6. методы статистического анализа данных для оценки значимости полученных результатов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено аналитическое решение уравнения переноса электромагнитного излучения в однородной анизотропно-рассеивающей среде в виде ряда по числу рассеяний.
2. Получены выражения для первых двух порядков рассеяния электромагнитного излучения и установлены приближения, описывающие переход от режима переноса к режиму диффузии.
3. Получены аналитические формулы для средних значений и корреляций координат и направлений, характеризующих распространение электромагнитного излучения в рассеивающей среде.
4. Разработан физически обоснованный метод моделирования транспорта нейтрино сквозь вещество с учётом взаимодействий по каналу нейтрального тока и эффекта регенерации потока.
5. Вычислены ожидаемые потоки нейтрино в нейтринном телескопе в зависимости от энергии и зенитного угла прилёта с использованием современных партонных функций распределения.
6. Исследовано влияние выбора и экстраполяции партонных функций распределения на полные сечения и конечные нейтринные потоки.
7. Проведён статистический анализ ослабления и регенерации нейтринных потоков, показавший возможность зондирования плотностной структуры Земли и выявления отклонений от современной модели плотности Земли.

Достоверность полученных результатов обеспечивается следующими положениями:

1. Общие решения задач переноса сведены к известным частным случаям как для одномерной, так и для трёхмерной геометрии, что подтверждает их математическую корректность.
2. Корректность аналитических решений и численных алгоритмов подтверждена независимыми расчётами, включая моделирование методом Монте–Карло.

3. Достоверность результатов, полученных при моделировании транспорта нейтрино, обеспечивается использованием современных физических моделей взаимодействий нейтрино с веществом и сопоставлением с данными других экспериментов.
4. Выполнено сравнение расчётов, реализованных в модуле `NuPropagator`, с результатами независимого нейтринного генератора `nuFATE`, показавшее согласие в пределах вычислительной точности.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы опубликованы и апробированы в научных изданиях и на конференциях различного уровня. Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- конференции молодых учёных *AYSS-2022* (устный доклад);
- Европейской школе по физике высоких энергий *ESHEP-2022* (постерная сессия);
- семинаре НИИЯФ МГУ;
- совещаниях коллаборации *Baikal-GVD*.

Личный вклад. Все положения, выносимые на защиту, были получены при определяющем участии или непосредственно автором. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад соискателя.

Публикации. Диссертант является соавтором 26 печатных работ. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных изданиях, в том числе в 5 статьях в рецензируемых научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus:

1. V. A. Allakhverdian, D. V. Naumov. *Exact Analytical Solution of the One-Dimensional Time-Dependent Radiative Transfer Equation with Linear Scattering*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 310, 2023, arXiv:2401.09511.
2. V. A. Allakhverdian, D. V. Naumov. *Infinite Series Solution of the Time-Dependent Radiative Transfer Equation in Anisotropically Scattering Media*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 326, 2024, arXiv:2401.15698.
3. Jarosław Stasielak *et al.* *High-Energy Neutrino Astronomy—Baikal-GVD Neutrino Telescope in Lake Baikal*. Symmetry, vol. 13, no. 3, 377 (2021).

4. V. A. Allakhverdian, D. V. Naumov, S. I. Zavyalov. *Baikal-GVD Neutrino Telescope: Unlocking the Secrets of the Universe's Catastrophic Events*. Publications of the Astronomical Observatory of Belgrade, vol. 104, 2023.
5. В. А. Аллахвердян, С. И. Завьялов, Д. В. Наумов *Распространение нейтрино высоких энергий через Землю: моделирование и чувствительность к структуре планеты*». Письма в ЭЧАЯ, том 23, выпуск 2 (2026).

и соавтором двух патентов на программное обеспечение:

1. Программный пакет для моделирования распространения света в однородных средах `RTELight`, 2025690874, 11.11.2025.
2. Программный пакет для распространения нейтрино и генерации нейтринных событий для нейтринных телескопов `NuPropagator`, 2025689183, 27.10.2025

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 1 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 195 страниц, включая 65 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 41 наименование.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Эксперимент BaikalGVD

Байкальский глубоководный нейтринный телескоп (или Baikal-GVD) — международный проект в области астрофизики частиц и нейтринной астрономии. Строительство телескопа обусловлено его потенциалом открытий в астрофизике, космологии и физике элементарных частиц. Основная цель данного эксперимента — детальное изучение потока космических нейтрино высоких энергий и поиск их источников. Baikal-GVD также может искать кандидатов на темную материю, нейтрино от распада сверхтяжелых частиц, магнитные монополи и другие экзотические частицы. Он также станет площадкой для экологических исследований озера Байкал.

Подготовительный этап проекта завершился в 2015 г. развертыванием демонстрационного кластера, состоящего из 192 оптических модулей. Строительство первой очереди Baikal-GVD было начато в 2016 году путем развертывания первого из восьми кластеров в базовой конфигурации, состоящих из 288 оптических модулей. В 2023 году установка Baikal-GVD насчитывает 12 кластеров. Еще в эксперименте появились дополнительные струны, расположенные между кластерами, что позволит повысить эффективность регистрации нейтрино.

Телескоп является одним из трех детекторов нейтрино в мире наряду с IceCube на Южном полюсе и KM3Net в Средиземном море.

1.2 Астрофизика частиц

1.2.1 Спектр космических лучей

Космическое излучение имеет широкий диапазон энергий от 10^{-1} ГэВ до 10^{12} ГэВ. Потоки космических лучей мы можем описать приближительной фор-

мулой

$$\frac{dN}{dE} = CE^{-\gamma}, \quad (1.1)$$

где γ несколько раз меняется на протяжении всего спектра. На рис. (1.1) можно видеть, что у спектра космических лучей есть определённое количество особенностей. Обсудим их.

1. Первая особенность возникает при энергии 3×10^6 ГэВ. Эта особенность была (получившая название “астрофизическое колено Христиансена”) обнаружена в 1956 г. Г.Б. Христиансенем и Г.В. Куликовым. Оказывается, оно возникает за счет того, что при энергиях выше данной возникает обогащение космических лучей тяжелыми ядрами (начало обрезания потока легкой компоненты космических лучей).
2. При энергиях 2×10^7 ГэВ и 3×10^8 ГэВ также возникают особенности спектра, которые обеспечены статистическими особенностями.
3. Следующая особенность возникает при энергии 3×10^9 ГэВ. Спектр частиц перестает убывать слишком быстро, что свидетельствует о появлении более легкой компоненты в космических лучах от внегалактических источников.
4. Последняя особенность, отвечающая за обрезание спектра космических лучей, связана с эффектом Грейзина-Зацепина-Кузьмина (ГЗК-эффект [4]). Этот эффект описывает неупругое взаимодействие протонов высоких энергий с реликтовым излучением. В нем протоны теряют энергию и в результате рождаются пионы и нуклоны меньших энергий. Это приводит к тому, что поток протонов при больших энергиях сильно уменьшается, что и приводит к сильному падению спектра космических лучей. На данный момент событий с энергиями выше энергии, необходимой для эффекта ГЗК, наблюдалось всего 10 штук. Еще одна проблема экспериментов во льду — примеси. Они создают дополнительные центры рассеяния, которые могут мешать более точной реконструкции направления нейтрино. В водных экспериментах реконструкция направления имеет намного большую точность, однако восстановление полной энергии нейтрино имеет меньшую точность.

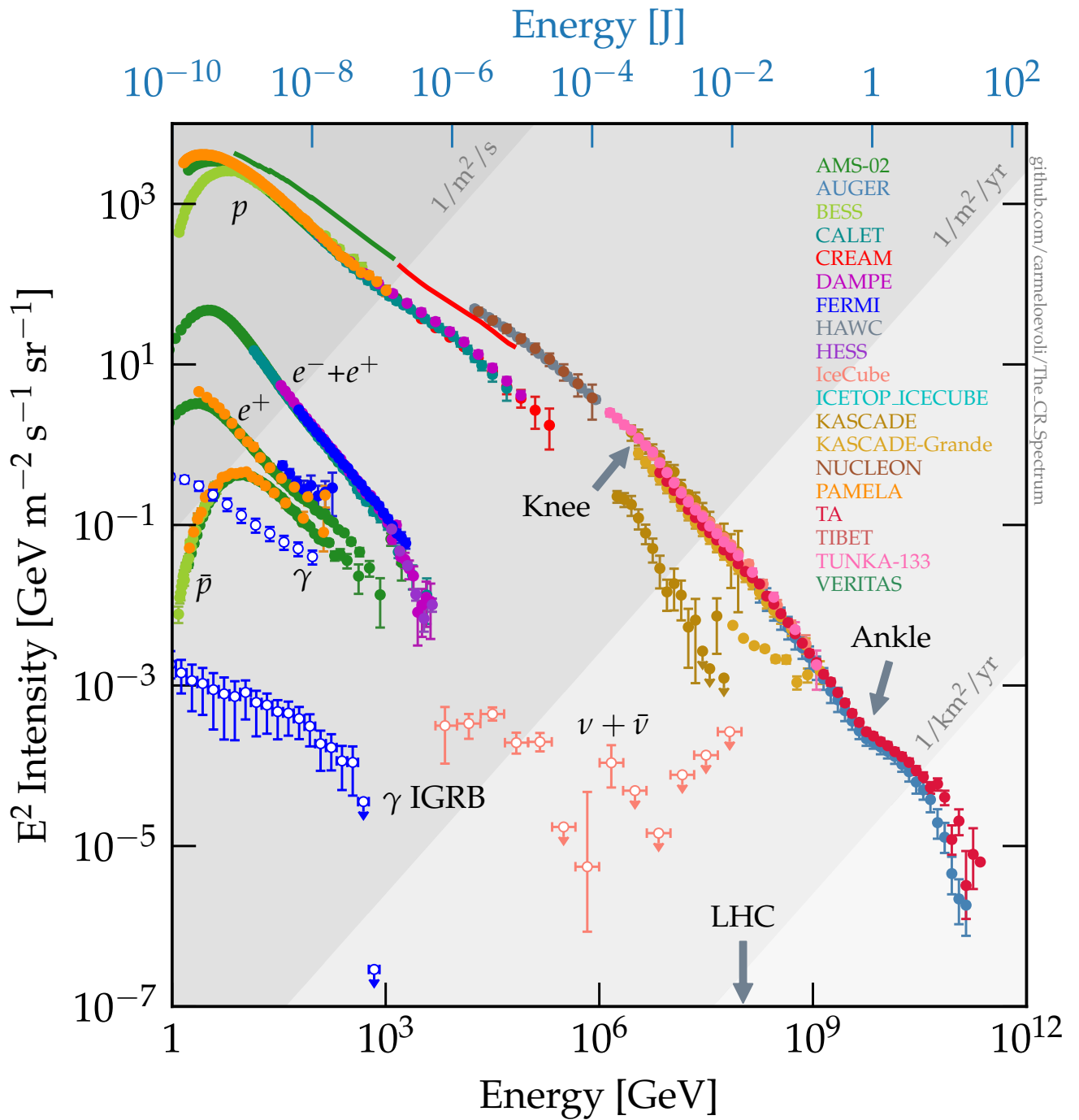


Рисунок 1.1 — Спектр космических лучей, взятый из [5]

1.2.2 Модели происхождения нейтрино

Самый естественный механизм рождения нейтрино связан с взаимодействиями космических лучей и распадом пионов, возникающих в этих взаимодействиях. Стандартный процесс рождения нейтринных потоков можно описать следующим образом:

1. Ультрарелятивистские протоны сталкиваются, и в реакции рождается как минимум один π -мезон. Он в среднем уносит пятую часть всей энергии системы.
2. Далее родившийся пион распадается по одному из следующих сценариев, в зависимости от его заряда:

$$\text{а) } \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \nu_\mu,$$

$$\text{б) } \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu \nu_\mu,$$

$$\text{в) } \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma.$$

В этих реакциях можно грубо оценить энергию каждого нейтрино как $E_\nu = E_\pi/4$. Более точные оценки приводят к похожему результату [6]. Энергию фотонов можно оценить как $E_\gamma = E_\pi/2$.

3. Таким образом, энергии продуктов взаимодействия можно оценить следующим образом:

$$\text{а) } E_\nu = E_p/20,$$

$$\text{б) } E_\gamma = E_p/10.$$

Помимо протон-протонного взаимодействия можно также рассмотреть протон-фотонное взаимодействие. При высоких энергиях фотонов процесс идет схожим образом с протон-протонным взаимодействием. Для такого взаимодействия концентрация фотонов должна быть высокой, что несправедливо для фотонов высокой энергии. Однако высокие концентрации фотонов наблюдаются при их очень низкой энергии (например, микроволновое фоновое излучение). Как уже обсуждалось ранее, такие реакции могут проходить с образованием дельта-резонанса:

$$1. p + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+ \rightarrow n e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \nu_\mu,$$

$$2. p + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p + \pi^0 \rightarrow p \gamma \gamma.$$

Энергии конечных частиц здесь такие же, как и в предыдущем случае, однако в данном случае не появляется $\bar{\nu}_e$. В заключение этого пункта стоит отметить, что спектр продуктов взаимодействия повторяет спектр начальных протонов, который, как обсуждалось ранее, является степенным. Однако спектр нейтрино, полученных в протон-фотонном взаимодействии отличается от спектра начальных протонов из-за резонансного характера данного взаимодействия.

1.2.3 Основные нейтринные астрофизические эксперименты

Выделим три основных вида экспериментов, связанных с нейтринной астрономией: водные эксперименты, эксперименты во льду, горные эксперименты. В экспериментах во льду очень большая длина поглощения и очень маленькая длина рассеяния, поэтому свет от биологических (и прочих) источников быстро затеряется во льду и не сможет дойти до детектора. За счет слабого поглощения свет без препятствий доходит до оптического модуля, что позволяет регистрировать энергию точнее. К сожалению, из-за маленькой длины рассеяния становится трудно определить направление прихода нейтрино. Поэтому у экспериментов во льду (IceCube, например) маленькая точность восстановления направления нейтрино по сравнению с водными экспериментами. В горных экспериментах сильно подавлен фон из-за естественных преград. В водных экспериментах сильно меньше длина поглощения чем во льду, однако длина рассеяния сильно больше, что позволяет хорошо реконструировать направление нейтрино.

1.2.4 Спектр астрофизических нейтрино

Топология событий

Основной способ рождения высокоэнергичных нейтрино — взаимодействие высокоэнергичных протонов. В зависимости от энергии нейтрино и от аромата в детекторе будут наблюдаться разные экспериментальные картины. Например, если реакция в детекторе происходит с участием мюонного нейтрино, то в данной реакции будет рождаться релятивистский мюон. Если он очень высокоэнергичный, то его длина трека будет очень большой. Так, например, при энергии мюона 100 ТэВ длина трека мюона будет равна

$$L(E_\mu) \approx 6.6 \times 10^2 \sqrt{\frac{E_\mu^2}{m^2 c^4} - 1} \approx 6.6 \times 10^5 \text{ км}, \quad (1.2)$$

что значительно превышает линейные размеры установки. Поэтому фиксироваться будет только черенковское излучение от этого мюона в виде узкого трека. Если будет проходить реакция с участием электронного нейтрино, то мы будем наблюдать два каскада: первый связан с электромагнитным каскадом от электрона, второй возникает из-за рождения адронной системы в реакции $\nu_e N \rightarrow eX$. Из-за относительной близости эти два каскада наложатся друг на друга и, как следствие, мы увидим один большой каскад. Если же реакция происходит с участием таонного нейтрино, то в реакции будет рождаться тау-лептон. Длина трека тау-лептона до распада значительно меньше, чем у мюона (при $E_\tau = 1$ ПэВ):

$$L(E_\tau) \approx 8.7 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{E_\tau^2}{m^2 c^4} - 1} \approx 48.9 \text{ м.} \quad (1.3)$$

Этого расстояния достаточно, чтобы разделить два каскада (от тау-лептона и от адронной системы). Таким образом, в детекторе будет зарегистрировано два каскада. При меньших энергиях тау-лептон не успеет улететь достаточно далеко, и два каскада сольются в один. При наличии каскадов из-за изотропного рассеяния относительно системы центра масс каскад является размытым объектом, что сильно затрудняет определение начального направления нейтрино. Напротив, события с треком позволяют определить направление прихода намного лучше. Если же необходимо измерить энергию, то ситуация меняется. Трековые события оставляют энергию в основном за счет черенковского излучения, что составляет лишь малую часть энергии частицы. Каскады, если они начинаются в объеме детектора, позволяют зарегистрировать почти всю энергию начальной частицы.

Фон для нейтринных событий

Основной фон для астрофизических нейтрино — потоки атмосферных нейтрино и потоки мюонов. Этот фон превосходит спектр астрофизических нейтрино на большом диапазоне энергий (вплоть до 100 ТэВ). Атмосферные нейтрино рождаются в следующем процессе: в pp столкновениях рождаются π^\pm -мезоны. В атмосфере они успевают распасться. Продуктами распада (по основному каналу) являются μ^\pm и $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$. При низких энергиях мюоны не долетают

до земли и тоже распадаются, порождая электронные и мюонные нейтрино. Таким образом, пренебрегая таонной составляющей, можно видеть, что соотношение нейтрино разных ароматов имеет следующий вид

$$\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 2 : 0 \quad (1.4)$$

Полученный спектр примерно соответствует спектру $E^{-2.7}$. Если мюоны обладают большей энергией ($\approx 5 \text{ ГэВ} - 10 \text{ ГэВ}$), то они успевают долететь до Земли. Из-за этого мюонная компонента в потоке начинает сильно преобладать. Также нужно учесть вклад пионов, которые при большой энергии начинают взаимодействовать в атмосфере и породить атмосферные ливни. Также стоит учесть, что с некоторого момента вклад начинают давать очарованные кварки, Эти дополнительные вклады изменяют спектр до $E^{-3.7}$. Если говорить об угловой зависимости, то пик углового распределения приходится на горизонтальное направление, т.е. $\cos \theta = 0$. Связано это с тем, что в этом случае путь, который должен пройти мюон в атмосфере, наибольший. Значит и вероятность его распада больше. При больших значениях $\cos \theta$ поток гладко уменьшается. Отделить отдельно атмосферное и астрофизическое событие по одиночке нельзя, однако анализируя данные в совокупности, можно попытаться разделить их (с помощью распределений по энергии и зенитному углу. Спектр астрофизических нейтрино менее жесткий при высоких энергиях и направления астрофизических нейтрино практически изотропно вплоть до очень больших энергий). Фон от атмосферных мюонов можно убрать схемой совпадения, так как для нейтринного события требуются либо два каскада, либо трековое и каскадное событие.

1.2.5 Гипотетические источники

Здесь опишем объекты, которые потенциально могут быть источниками астрофизических и космогенных нейтрино.

1. **Активные ядра галактик.** Окрестности сверхмассивных черных дыр - очень мощный источник излучения. Предполагается, что нейтрино может родиться очень близко к черной дыре за счет $p\gamma$ взаимодействий (из-за маленькой плотности вещества в центральной области галактики). Протоны в данном взаимодействии ускоряются до

- необходимых энергий ($\approx 10^7 - 10^8$ ГэВ) либо в магнитосфере черной дыры, либо в ударных волнах вблизи аккреционного диска. Фотоны появляются по большей части от аккреционного диска черной дыры. Если такая реакция происходит вблизи релятивистского джета, то от таких реакций могут родиться нейтрино с высокими энергиями (аккреционный диск излучает в основном в ультрафиолетовом диапазоне, а в релятивистском джете рождаются фотоны в рентгеновском диапазоне).
2. **Остановившиеся джеты.** При взрыве сверхмассивной звезды джет, возникающий в центральной части звезды, не может дойти до поверхности звезды из-за очень плотной водородной оболочки звезды. В таком процессе протоны из джета взаимодействуют с протонами из оболочки. В результате могут родиться нейтрино с энергиями в области 100 ТэВ.
 3. **Приливное разрушение звезд.** В этом сценарии звезда падает на массивную черную дыру. Сначала звезда разрушается приливными силами черной дыры, затем еще часть звезды сгорает в аккреционном диске. Этот процесс приводит к вспышке либо к джету. Тут также возможны как pp процессы (при взаимодействии релятивистских протонов из джета с остатками звезды), так и $p\gamma$ процессы, что в итоге приводит к рождению высокоэнергичных нейтрино.
 4. **Резервуары космических лучей.** Это астрофизические объекты, которые могут удерживать космические лучи магнитным полем в течение долгого времени. За счет их удержания они рано или поздно провзаимодействуют со средой благодаря pp -взаимодействию, породив нейтрино высоких энергий.
 5. **Распады частиц темной материи.** Одним из гипотетических источников высокоэнергичных нейтрино являются WIMP - слабо взаимодействующие массивные частицы. Астрофизические нейтрино могут рождаться в распадах частиц темной и иметь спектр нейтрино с ярко выраженным пиком в диапазоне от 10 ТэВ до 10 ПэВ [6].
 6. **Газовые пузыри и области звездообразования.** Космические лучи могут взаимодействовать с веществом межзвездного газа. За счет этого могут рождаться нейтрино высоких энергий в диске Галактики. Из-за неоднородной структуры звездного газа и из-за возможного

удержания космических лучей магнитным полем потоки от данного источника получаются неоднородными по направлению.

7. **Вклад остальных галактик.** Остальные галактики также могут вносить вклад в нейтринные потоки. Соответствующий вклад от всех остальных галактик сопоставим с вкладом нашей галактики [7].

1.2.6 Современные результаты

Первое астрофизическое событие энергией нейтрино больше 1 ПэВ было зарегистрировано в 2013 году коллаборацией IceCube. В 2019 году похожие результаты представил эксперимент ANTARES. Эксперимент Baikal-GVD также подтверждает наличие астрофизического потока (что и является одним из его основных достижений на данный момент).

Для диффузного потока используют простую оценку вида

$$\frac{dF_{\nu+\bar{\nu}}}{dE} = \Phi_0 \left(\frac{E_\nu}{100 \text{ ТэВ}} \right)^{-\gamma} \times 10^{-18} \text{ ГэВ}^{-1} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} \quad (1.5)$$

Такая параметризация предполагает, что диффузионный поток является изотропным и одинаков для всех типов нейтрино. В разных экспериментах получаются разные значения для параметров Φ_0 и γ .

В Baikal-GVD был проведен анализ с двумя выборками нейтринных событий (каскадного типа с реконструированной энергией выше 70 ТэВ), имеющих с большой вероятностью астрофизическое происхождение. На основе этого анализа была отвергнута гипотеза об отсутствии астрофизического потока на уровне 3.05σ . Для стандартной параметризации были получены значения $\Phi_0 = 3.04_{-1.21}^{+1.52}$ и $\gamma = 2.58_{-0.33}^{+0.27}$ в диапазоне энергий 15 – 100 ТэВ.

IceCube продолжает набор данных, и параллельно в эксперименте ведутся работы по улучшению качества реконструкции. Коллаборацией также был представлен спектр, объединяющий различную информацию от разных источников наблюдения [13], [14]. С его помощью были получены следующие значения для параметров потока в диапазоне 2.5 ТэВ - 6.3 ПэВ: $\Phi_0 = 1.80_{-0.16}^{+0.13}$ и $\gamma = 2.52_{-0.04}^{+0.04}$. Был представлен еще один спектр, основанный на анализе треков, начинающихся в детекторе. Этот анализ дает результаты $\Phi_0 = 1.68_{-0.09}^{+0.19}$ и $\gamma = 2.58_{-0.09}^{+0.10}$.

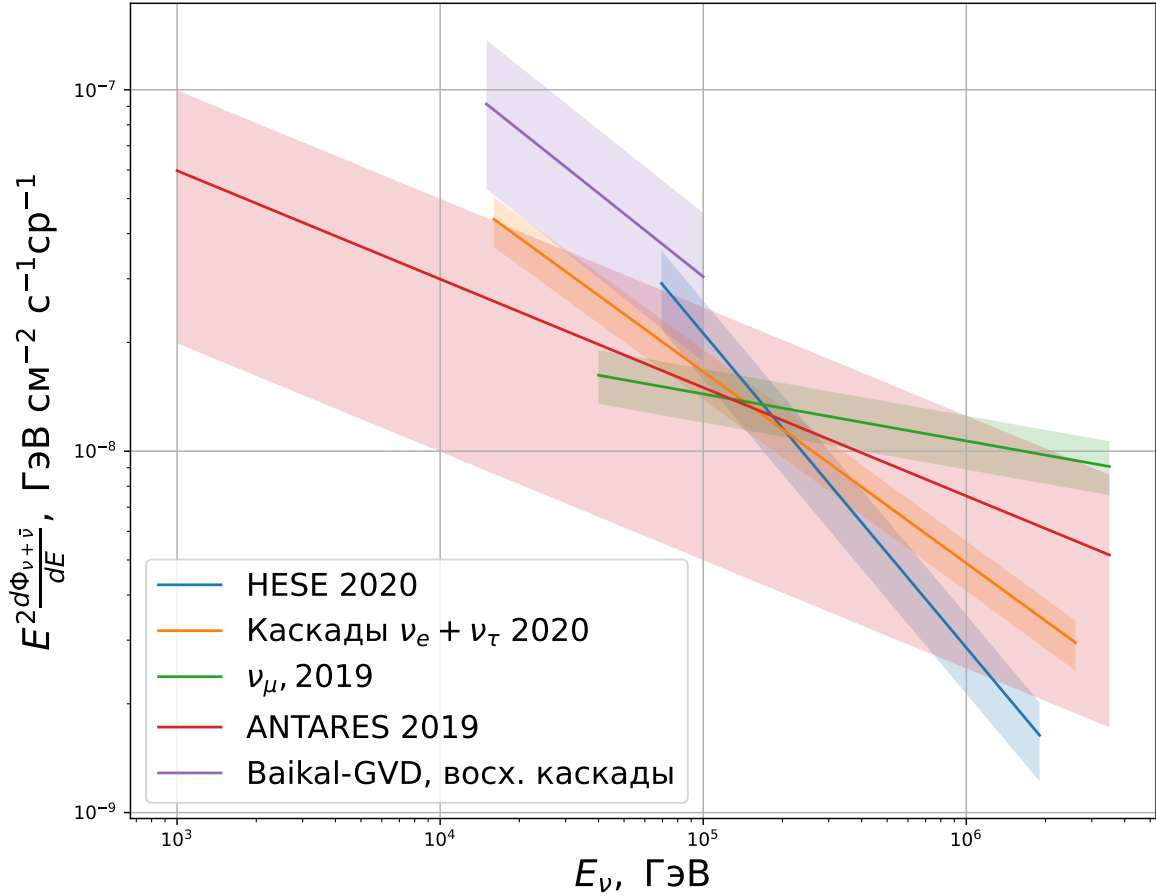


Рисунок 1.2 — Спектры астрофизических нейтрино, соответствующих разным исследованиям: (1) - HESE 2020 [8]; (2) - Каскады $\nu_e + \nu_\mu$, 2020 [9]; (3) - ν_μ , 2019 [10]; (4) - ANTARES 2019 [11]; (5) - Baikal-GVD, восходящие потоки [12]

Можно видеть, что существует проблема, связанная с согласованием спектров от разных анализов.

Теперь перейдем к предполагаемым источникам событий нейтрино высоких энергий, которые удалось зарегистрировать. Источники нейтрино можно найти по анизотропии направления прилета зарегистрированных событий (например, по анизотропии каскада). Также иногда используют метод слепого поиска. Этот метод помогает избавиться от большой неопределенности в отношении определенных гипотетических источников. В данном подходе по всему небу ищутся кластеры нейтрино, пришедшие с близких направлений, что может указывать на возможные мощные источники нейтрино. С помощью такого подхода могут быть обнаружены только очень мощные источники. Одними

из наиболее вероятных источников нейтрино являются гамма-яркие блазары. Блазар - это ядро активной галактики, испускающее релятивистский джет практически в направлении наблюдателя. Такие вспышки могут генерировать потоки нейтрино с энергиями от 1 ТэВ (за счет ускорения протонов внутри блазара). В анализе, основанном на данных коллаборации IceCube, была изучена выборка из 56 направлений прихода из усредненного РСДБ-потока (статистика, полученная с помощью радиоинтерферометров со сверхдлинной базой) с энергиями [15]. Было обнаружено значительное превышение от направлений ожидаемого нейтринного потока на уровне 3σ , что связывается с блазарами [16]. Еще одно событие, связанное с блазаром - IC220205 в 2022г. Предполагаемый источник этого события - блазар PKS 1741-038.

Слепой поиск также используется и для поиска нейтринных вспышек на основании направления вспышки, ее продолжительности времени. Наиболее подходящими кандидатами являются блазары и катастрофы в звездных масштабах. Одним из значимых результатов, полученных таким способом, является вспышка от блазара 1ES 1959+650 в 2002 г. Коллаборация AMANDA зарегистрировала 3 нейтринных события, пришедших в течение 66 суток [17].

Еще один результат был получен коллаборацией IceCube от вспышки блазара TXS 0506+056 [18]. В конце 2022 г. коллаборация Baikal-GVD сообщила о каскадном событии GVD210418CA с энергией 225 ± 75 ТэВ, пришедшего от того же блазара [19].

Также в качестве потенциальных источников рассматриваются космические гамма-всплески, но пока не было обнаружено ни одного значимого сигнала от таких источников.

Еще одним интересным источником является приливное разрушение звезд, происходящее при падении звезды на черную дыру. Такие события можно наблюдать как вспышки в видимом диапазоне и, что реже, как джет. Нейтринное событие с энергией ≈ 217 совпало по направлению прихода с одним из таких событий приливных разрушений, которое было рассмотрено в работе [20].

Еще одно интересное событие наблюдалось в Баксанской нейтринной обсерватории установкой Ковер-2. Было зарегистрировано нейтринное событие с энергией ≈ 154 ТэВ в направлении Кокона Лебеда со статистической значимостью 3.1σ [21]. На основе ряда работ можно сказать о наличии галактических нейтрино высоких энергий [22], [23], [24],[25]. Предполагаемые источники таких нейтрино - LSI+61 303 и NGC 1068.

Глава 2. Решение одномерной задачи переноса

Начнем с изучения одномерной задачи переноса. Изучение данной задачи поможет нам лучше понять закономерности трехмерной задачи переноса. Как можно будет увидеть в следующих главах, некоторые закономерности задачи переноса в одномерном случае совпадают с закономерностями в трехмерном случае.

2.1 Формулировка задачи

В одномерной постановке задачи переноса возможно лишь два направления фотона: вперед и назад. Обозначим их $s = +1$ и $s = -1$ соответственно. Будем обозначать пространственную ось как x и введем переменную $l = ct$, соответствующую времени, измеренному в единицах скорости света.

Определим вид, который должна иметь функция рассеяния, и вид интеграла рассеяния. Множество всех направлений не является континуальным, а конечным, поэтому интеграл в правой части уравнения переноса необходимо заменить на сумму по всем возможным направлениям. Для определения функции рассеяния достаточно задать всего две вероятности: вероятность того, что направление фотона не изменится после рассеяния, и вероятность того, что направление фотона изменится на противоположное.

$$\begin{aligned} P(+1, +1) = P(-1, -1) &= \frac{1+g}{2}, \\ P(+1, -1) = P(-1, +1) &= \frac{1-g}{2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь параметр g подобран в соответствии с трехмерным случаем ($g = 1$ соответствует рассеянию только вперед, а случай $g = -1$ соответствует перерассеянию в противоположную сторону на каждом шагу).

После всех определений сформулируем одномерную задачу переноса:

$$(\partial_l + s\partial_x + \mu_t) L(l, x, s) = \mu_s \sum_{s'=\pm 1} P(s, s') L(l, x, s'). \tag{2.2}$$

Здесь $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_l = \partial/\partial l$. Так как s может принимать всего два значения, можно записать уравнение (2.2) для каждого s и получить систему из двух уравнений. Введем обозначения:

$$L_{\pm}(l, x) = e^{\mu_t l} L(l, x, s = \pm 1). \quad (2.3)$$

Тогда производная по l дает дополнительный множитель, сокращающий слагаемое $\mu_t L(l, x, s)$ в левой части, так как

$$\begin{aligned} \partial_l L(l, x, s = \pm 1) + \mu_t L(l, x, s) &= \partial_l (e^{-\mu_t l} L_{\pm}(l, x)) + \mu_t e^{-\mu_t l} L_{\pm}(l, x) \\ &= e^{-\mu_t l} \partial_l (L_{\pm}(l, x)) - \mu_t e^{-\mu_t l} L_{\pm}(l, x) + \mu_t e^{-\mu_t l} L_{\pm}(l, x) \\ &= e^{-\mu_t l} \partial_l (L_{\pm}(l, x)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя данную замену, раскрывая сумму в правой части одномерного уравнения переноса, приходим к итоговой системе уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_l L_+ + \partial_x L_+ &= \mu_s \left(\frac{1+g}{2} L_+ + \frac{1-g}{2} L_- \right), \\ \partial_l L_- - \partial_x L_- &= \mu_s \left(\frac{1-g}{2} L_+ + \frac{1+g}{2} L_- \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перед тем как перейти к решению, превратим эту систему в задачу Коши, чтобы получить единственное решение. Итак, пусть у нас в начальный момент времени есть только один фотон, находящийся в точке $x = 0$ и его скорость направлена по оси x , что соответствует $s = 1$. Тогда начальные условия можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} L(0, x, +1) &= L_+(0, x) = \delta(x), \\ L(0, x, -1) &= L_-(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Итак, задача Коши сформулирована. Это система зацепляющихся дифференциальных уравнений первого порядка с дельтообразным начальным условием. Решим ее, сведя к уравнению второго порядка.

2.2 Решение системы уравнений

Приведем соответствующую систему к следующему виду: для первого уравнения перенесем L_+ влево, во втором будем переносить L_- влево. Таким

образом приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}\partial_l L_+ + \partial_x L_+ - \mu_s \frac{1+g}{2} L_+ &= \mu_s \frac{1-g}{2} L_-, \\ \partial_l L_- - \partial_x L_- - \mu_s \frac{1+g}{2} L_- &= \mu_s \frac{1-g}{2} L_+.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Произведем замену искомым функций, чтобы сократить слагаемые без производной.

$$\begin{aligned}L_+ &= e^{\mu_s(1+g)l/2} \tilde{L}_+, \\ L_- &= e^{\mu_s(1+g)l/2} \tilde{L}_-.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Такая подстановка преобразует слагаемые с производной следующим образом:

$$\begin{aligned}\partial_l L_{\pm} - \mu_s \frac{1+g}{2} L_{\pm} &= \partial_l (e^{\mu_s \frac{1+g}{2} l} \tilde{L}_{\pm}) - \mu_s \frac{1+g}{2} e^{\mu_s \frac{1+g}{2} l} \tilde{L}_{\pm} \\ &= e^{\mu_s \frac{1+g}{2} l} \partial_l \tilde{L}_{\pm} + \mu_s \frac{1+g}{2} e^{\mu_s \frac{1+g}{2} l} \tilde{L}_{\pm} - \mu_s \frac{1+g}{2} e^{\mu_s \frac{1+g}{2} l} \tilde{L}_{\pm} \\ &= e^{\mu_s \frac{1+g}{2} l} \partial_l \tilde{L}_{\pm}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Таким образом система (2.7) принимает вид

$$\begin{aligned}(\partial_l + \partial_x) \tilde{L}_+ &= \lambda \tilde{L}_-, \\ (\partial_l - \partial_x) \tilde{L}_- &= \lambda \tilde{L}_+,\end{aligned}\tag{2.10}$$

где введены обозначения:

$$\lambda = \mu'_s/2, \quad \mu'_s = \mu_s(1-g).\tag{2.11}$$

Для решения данной системы введем переменные светового конуса для одномерного случая:

$$\begin{aligned}\xi &= l - x, \quad \eta = l + x, \\ l &= \frac{\xi + \eta}{2}, \quad x = \frac{\eta - \xi}{2}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Выразим производные в старых переменных через производные в новых переменных:

$$\begin{aligned}\partial_l &= \frac{\partial \xi}{\partial l} \partial_{\xi} + \frac{\partial \eta}{\partial l} \partial_{\eta} = \partial_{\xi} + \partial_{\eta}, \\ \partial_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \partial_{\xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \partial_{\eta} = \partial_{\eta} - \partial_{\xi}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Учитывая эту замену, можно написать исходную систему в упрощенном виде:

$$\begin{aligned}\partial_{\eta} \tilde{L}_+ &= \frac{\lambda}{2} \tilde{L}_-, \\ \partial_{\xi} \tilde{L}_- &= \frac{\lambda}{2} \tilde{L}_+.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Дифференцируя первое уравнение по ξ и используя второе уравнение, сводим систему уравнений первого порядка к уравнению второго порядка:

$$\partial_{\xi\eta}^2 \tilde{L}_+ = \frac{\lambda}{2} \partial_{\xi} \tilde{L}_- = \frac{\lambda^2}{4} \tilde{L}_+. \quad (2.15)$$

Это уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа. Для корректной постановки задачи нужно добавить еще дополнительные условия (для данной задачи это будет условие на характеристиках). Один из способов решения данной задачи заключается в разложении искомой функции в степенной ряд. В данной работе будет рассмотрен другой способ решения этой задачи.

2.2.1 Сведение системы к уравнению Бесселя

Введем обозначения, которые упростят дальнейшее решение. Введем дифференциальные операторы $\hat{K}_{\pm} = \partial_l \pm \partial_x$ и сделаем предположение, что $\tilde{L}_-(l, x)$ зависит только от релятивистского интервала, который в одномерном случае принимает вид $\tau = \sqrt{l^2 - x^2}$. Последнее допущение полностью соответствует поиску автомодельных решений данной системы. Получаем, что одно из уравнений превращается в уравнение для определения $\tilde{L}_+(l, x)$ через $\tilde{L}_-(l, x)$, а второе превратится в уравнение на функцию $\tilde{L}_-(l, x)$. В самом деле, если учесть, что $\hat{K}_- \tau = \frac{l+x}{\tau}$, получим, что

$$\tilde{L}_+(l, x) = \frac{1}{\lambda} \hat{K}_- \tilde{L}_-(\tau) = \frac{1}{\lambda} \tilde{L}'_-(\tau) \frac{l+x}{\tau}, \quad (2.16)$$

где штрих означает производную по аргументу функции. Подставляем это выражение в первое уравнение системы (2.10):

$$\hat{K}_+ \left(\frac{1}{\lambda} \tilde{L}'_-(\tau) \frac{l+x}{\tau} \right) = \lambda \tilde{L}'_-. \quad (2.17)$$

Теперь учтем, что $\hat{K}_+ \tau = \frac{l-x}{\tau}$, $\hat{K}_+(l+x) = 2$, $\hat{K}_+(\frac{1}{\tau}) = -\frac{l-x}{\tau^3}$. Тогда уравнение принимает следующий вид:

$$\hat{K}_+ \left(\tilde{L}'_-(\tau) \right) \frac{l+x}{\tau} + \tilde{L}'_-(\tau) \hat{K}_+ \left(\frac{l+x}{\tau} \right) = \lambda^2 \tilde{L}'_-. \quad (2.18)$$

Раскрывая выражения в скобках, приходим к следующему уравнению:

$$\tilde{L}'' + \frac{\tilde{L}'}{\tau} - \lambda^2 \tilde{L} = 0. \quad (2.19)$$

Это уравнение совпадает с уравнением на модифицированные функции Бесселя. В самом общем виде это уравнение имеет следующий вид:

$$f'' + \frac{f'}{\tau} + \left(1 - \frac{n^2}{\tau^2}\right)f = 0. \quad (2.20)$$

Отсюда приходим к выводу, что решение уравнения (2.19) есть функция Бесселя нулевого порядка. Добавим условие, что мы ищем решение внутри светового конуса (т.е. решение, не превышающее скорость света). Таким образом полное решение можно записать в следующем виде:

$$\tilde{L}_-(\tau) = \frac{\lambda}{2} \tilde{\theta}(\tau^2) I_0(\lambda\tau), \quad (2.21)$$

где фактор $\lambda/2$ введен для правильной нормировки. Здесь также была введена функция Хэвисайда $\tilde{\theta}$, необходимая для выделения из всех решений только тех, что лежат в световом конусе

$$\tilde{\theta}(\tau^2) = (1 - \theta(-\tau^2)) \quad (2.22)$$

или же

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \tilde{\theta}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Зная решение для $\tilde{L}_-(\tau)$, можно сразу написать решение для $\tilde{L}_+(\tau)$:

$$\tilde{L}_+ = \frac{1}{\lambda} \hat{K}_- \tilde{L}_- = \frac{1}{2} \left[\left(\hat{K}_- \tilde{\theta}(\tau^2) \right) I_0(\lambda\tau) + \tilde{\theta}(\tau^2) \lambda \left(\hat{K}_- \tau \right) I_0'(\lambda\tau) \right]. \quad (2.24)$$

Учтем, что

$$\hat{K}_- \tilde{\theta}(\tau^2) = \hat{K}_- (1 - \theta(-\tau^2)) = -\hat{K}_- (\theta(-\tau^2)) = 2\delta(l - x). \quad (2.25)$$

Используем стандартные соотношения для модифицированных функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{dI_0}{dx} &= I_1, \\ \frac{dI_n}{dx} &= I_{n-1} - \frac{n}{x} I_n. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Эти соотношения легко доказываются с помощью разложения функции в ряд и последующего дифференцирования. Итак, учитывая рекуррентные соотношения, можно написать выражение для \tilde{L}_+ .

$$\tilde{L}_+ = \left[\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \frac{l+x}{\tau} \frac{\lambda}{2} I_1(\lambda\tau) \right]. \quad (2.27)$$

Осталось проверить согласованность уравнений. Для этого нужно подействовать на \tilde{L}_+ оператором \hat{K}_+ и проверить, что получается $\lambda\tilde{L}_-$. В самом деле

$$\begin{aligned} \hat{K}_+\tilde{L}_+ &= \left[\hat{K}_+\delta(l-x) + \left(\hat{K}_+\frac{l+x}{\tau}\right)\tilde{\theta}(\tau^2)\frac{\lambda}{2}I_1(\lambda\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{l+x}{\tau}\frac{\lambda}{2} \left((\hat{K}_+\tilde{\theta}(\tau^2))I_1(\lambda\tau) + \tilde{\theta}(\tau^2)\lambda(\hat{K}_+\tau)I_1'(\lambda\tau) \right) \right] \\ &= \lambda\tilde{L}_-, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где было учтено, что

$$\begin{aligned} \hat{K}_+\delta(l-x) &= 0, \quad \hat{K}_+\tilde{\theta}(\tau^2) = 2\delta(l+x), \quad \delta(l\pm x)I_1(\lambda\tau) = 0, \\ \hat{K}_\pm\tau &= \frac{l\mp x}{\tau} = \sqrt{\frac{l\mp x}{l\pm x}}, \quad \hat{K}_+\frac{l+x}{\tau} = \frac{1}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Итак, итоговое решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L(l, x, +1) &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \times \left(\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu'_s}{4} I_1(\mu'_s\tau/2) \right), \\ L(l, x, -1) &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \tilde{\theta}(\tau^2) \frac{\mu'_s}{4} I_0(\mu'_s\tau/2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Отметим наблюдательный факт — решение не зависит по отдельности от μ_s и g , а только от комбинации $\mu'_s = \mu_s(1-g)$ — обратной эффективной длины рассеяния.

2.3 Пространственные моменты

Посчитаем пространственные моменты, соответствующие нашему решению. Определим их с помощью следующей формулы:

$$\langle x^n(l) \rangle_s = \frac{1}{N(l)} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n L(l, x, s), \quad (2.31)$$

где $s = \pm 1$, а $L(l, x, s)$ описывается (2.30). Здесь $N(l)$ - нормировочный множитель, который определяется как:

$$N(l) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (L(l, x, +1) + L(l, x, -1)) = e^{-\mu_a l}. \quad (2.32)$$

Данная нормировка учитывает тот факт, что в системе происходит поглощение. Нормировочный множитель $N(l)$ описывает вероятность того, что фотон за время l не поглотится.

Подставляя явные выражения для решений в формулу для моментов, можно легко найти (данный вывод приведен в Приложении А), что

$$\begin{aligned} \langle x^{2m}(l) \rangle_+ &= l^{2m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) I_{m-\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{m-\frac{1}{2}}} e^{-\gamma}, \\ \langle x^{2m+1}(l) \rangle_+ &= l^{2m+1} \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2}) I_{m+\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{m+\frac{1}{2}}} e^{-\gamma}, \\ \langle x^{2m}(l) \rangle_- &= l^{2m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) I_{m+\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{m-\frac{1}{2}}} e^{-\gamma}, \\ \langle x^{2m+1}(l) \rangle_- &= 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где

$$\gamma = \mu'_s l / 2 \quad (2.34)$$

и $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера.

Найдем характерное поведение моментов на разных временах. Средняя координата, определяемая как $\langle x(l) \rangle = \langle x(l) \rangle_+ + \langle x(l) \rangle_-$, растет линейно при малых временах, а именно при $l \ll \mu'_s{}^{-1}$. Такое поведение соответствует режиму переноса, при котором фотон движется вперед и еще не успевает запутаться в среде. При таком режиме средняя скорость фотона совпадает со скоростью фотона в среде. При временах много больших обратной длины рассеяния $l \gg \mu'_s{}^{-1}$ мы получаем постоянное значение для среднего. Этот режим называется режимом диффузии. В таком режиме фотон начинает запутываться в среде, его средняя скорость превращается в 0.

$$\begin{aligned} \langle x(l) \rangle &= l \frac{I_{\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\gamma}, \\ \langle x(l) \rangle &\sim \begin{cases} l, & \text{for } l \ll \mu'_s{}^{-1} \\ \mu'_s{}^{-1}, & \text{for } l \gg \mu'_s{}^{-1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Также посмотрим на дисперсию координаты. Для начала найдем среднее от квадрата координаты, которое определяется как $\langle x^2(l) \rangle = \langle x^2(l) \rangle_+ + \langle x^2(l) \rangle_-$. Можно вывести, что

$$\langle x^2(l) \rangle = l^2 \frac{\left(I_{\frac{3}{2}}(\gamma) + I_{\frac{1}{2}}(\gamma) \right)}{(\gamma/2)^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\gamma}, \quad (2.36)$$

$$\langle x^2(l) \rangle \sim \begin{cases} l^2, & \text{for } l \ll \mu'_s{}^{-1} \\ l\mu'_s{}^{-1}, & \text{for } l \gg \mu'_s{}^{-1}. \end{cases}$$

Дисперсия же определяется как $D(l) = \langle x^2(l) \rangle - \langle x(l) \rangle^2$. Подставляя сюда формулы (2.35) и (2.36), получаем, что

$$D(l) = l^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\gamma}}{(\gamma/2)^{\frac{1}{2}}} \left(I_{\frac{3}{2}}(\gamma) + I_{\frac{1}{2}}(\gamma) - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) I_{\frac{1}{2}}^2(\gamma)}{(\gamma/2)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (2.37)$$

$$D(l) \sim \begin{cases} 0, & \text{for } l \ll \mu'_s{}^{-1} \\ l\mu'_s{}^{-1}, & \text{for } l \gg \mu'_s{}^{-1}. \end{cases}$$

На малых временах (меньших одной длины рассеяния) видно, что дисперсия обращается в 0. Такое поведение характерно для режима переноса, так как фотон практически летит по прямой, уравнение которой задаётся начальной координатой и направлением скорости фотона. В случае больших времен получаем, что дисперсия пропорциональна времени. Такое поведение характерно для диффузионного режима.

Построим отдельно среднее значение координаты и среднее от квадрата координаты. Начнем со среднего. Учитывая, что

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh(z)}{\sqrt{z}}, \quad (2.38)$$

можно написать, что

$$\langle x(l) \rangle_{1D} = \frac{1}{\mu'_s} (1 - e^{-\mu'_s l}). \quad (2.39)$$

В следующей главе будут выведены соответствующие моменты для трехмерного случая. Окажется, что

$$\langle x(l) \rangle_{1D} = |\langle \mathbf{r} \rangle_{3D}| = \langle (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}_0) \rangle_{3D} \quad (2.40)$$

Также интересно посчитать скорость фотона в среде:

$$v(l) = \frac{dx}{dl} = e^{-\mu'_s l} \quad (2.41)$$

Отсюда можно заключить, что скорость фотона (здесь идет речь об эффективной скорости фотона в среде) не превышает скорости света в среде.

Перейдем к среднему от квадрата координаты. Воспользуемся следующим соотношением:

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cosh(z) - \frac{\sinh(z)}{z} \right) \quad (2.42)$$

Подставляя это соотношение в (2.33), получаем:

$$\langle x^2 \rangle_{1D} = \frac{2}{(\mu'_s)^2} \left(\mu'_s l - 1 + e^{-\mu'_s l} \right) \quad (2.43)$$

Забегая вперед, в третью главу, мы можем написать следующее соотношение:

$$\langle x^2 \rangle_{1D} = \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{3D} \quad (2.44)$$

2.4 Сравнение аналитических результатов с методом Монте-Карло

Проведем валидацию результатов, путем сравнения формул с методом Монте-Карло. Будем сравнивать формулы, полученные в данной работе с методом Монте-Карло, написанным Д.В. Наумовым. Ожидается, что два метода дадут идентичные результаты, если в методе Монте-Карло взять количество фотонов (N_γ) и количество рассеяний (n_{scat}) бесконечно большими. Опишем моделирование Монте-Карло, используемое для сравнения:

1. Задается начальная точка ($x_0 = 0$) и осуществляется распространение фотона в начальном направлении ($s_0 = +1$).
2. В каждом событии рассеяния i алгоритм производит выбор расстояния смещения фотона l_i и новое распространение направление s_i . Смещение фотона определяется в соответствии с экспоненциальной функцией плотности вероятности $e^{-\mu_s l}$, новое направление выбирается в соответствии с функцией плотности вероятности:

$$s_i = \begin{cases} +s_{i-1}, & \text{с вероятностью } (1 + g)/2, \\ -s_{i-1}, & \text{с вероятностью } (1 - g)/2. \end{cases} \quad (2.45)$$

Здесь g — фактор анизотропии, характеризующий асимметрию направлений (угловое распределение), и μ_s — коэффициент рассеяния (обратная длина рассеяния).

3. После n_{scat} актов рассеяния, конечная позиция фотона определяется как

$$x = \sum_{i=0}^{n_{\text{scat}}} x_i + s_i \Delta x_i, \quad (2.46)$$

где $\Delta x_i = |x_{i+1} - x_i|$ и x_i - позиция фотона после i -го рассеяния. Полная длина пути l определяется как

$$l = \sum_{i=0}^{n_{\text{scat}}} l_i. \quad (2.47)$$

4. Данная процедура повторяется N_γ раз для моделирования различных путей фотона и, таким образом, рассчитывается $L_\pm(l, x)$, где L_\pm — это интенсивность света с соответствующими конечными направлениями. Поглощение фотонов учитывается умножением на фактор $e^{-\mu_a l}$, где μ_a — коэффициент поглощения (обратная длина поглощения).

Посмотрим на графики (рис 2.1), как выглядят результаты Монте-Карло для разных параметров g . Результаты Монте-Карло сильно зависят от количества рассеяний фотонов, которые мы берем. Посмотрим на эту зависимость для разных параметров g . Можно видеть, что асимптотически, при g далеких от 1, распределения сливаются в одно. Это связано с тем, что при таких g рассеяния усредняют всю информацию о начальных условиях. При близких к 1 значениях g рассеяние происходит в основном вперед, поэтому большая часть фотонов так и продолжит лететь вперед и усреднения не произойдет. Также можно видеть довольно очевидную картину, что с увеличением количества рассеяний u растет и точность оценки Монте-Карло. Дополнительно отметим, что при фиксированном x , чем больше значение времени l , тем больше нужно порядков рассеяния, чтобы достичь хорошей точности.

2.5 Разложение Монте-Карло и Монте-Карло с повышенной сходимостью

При рассмотрении графиков (рис. 2.2 - рис. 2.4) может возникнуть следующий вопрос — как, зная точное аналитическое решение, можно получить разложение Монте-Карло? Ответ на этот вопрос можно получить, если задуматься о сути метода Монте-Карло. Ради удобства будем проводить весь

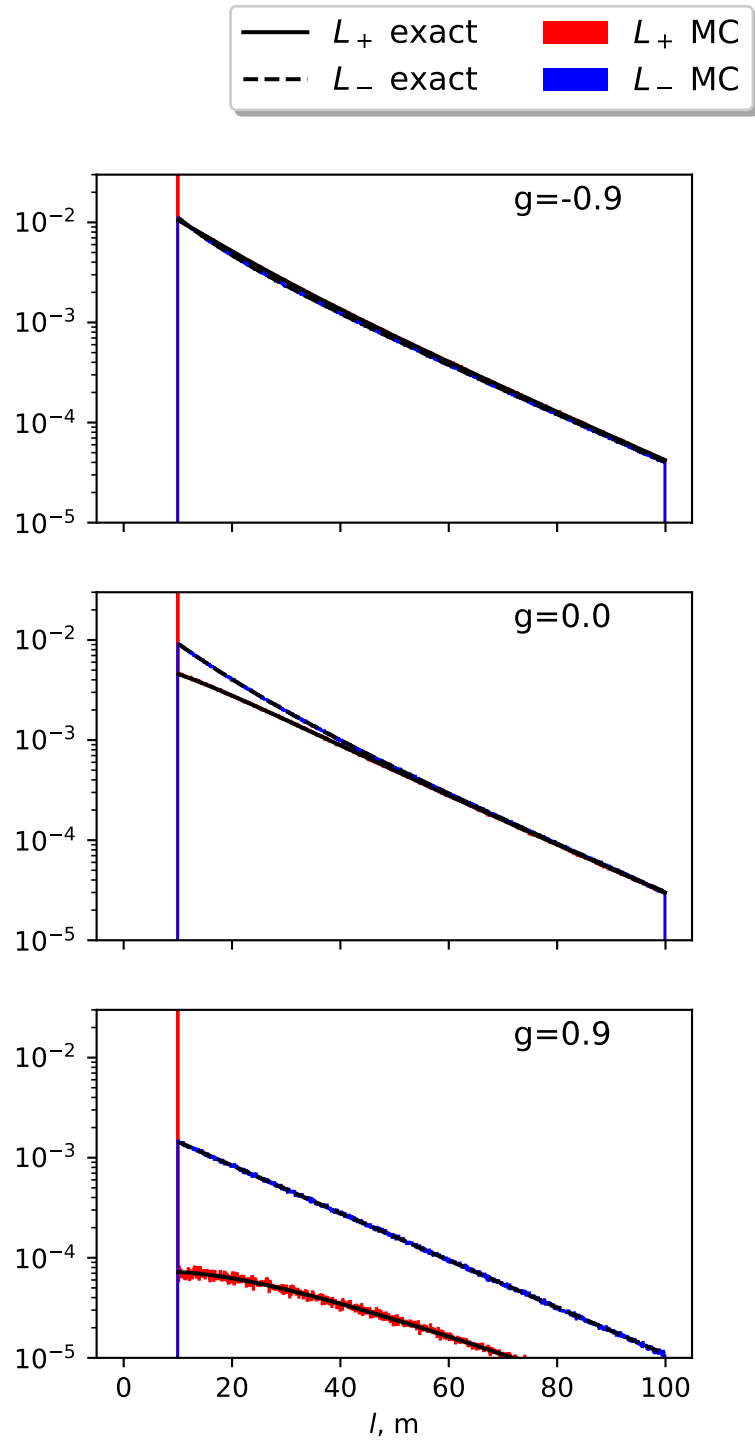


Рисунок 2.1 — Сравнение распределений L_{\pm} , рассчитанных с помощью Монте-Карло симуляций (гистограммы) с точным расчетом 2.30 (черные линии).

Верхний, средний и нижний графики соответствуют $g = -0.9, 0, 0.9$.

дальнейший анализ и все сравнение для функции L_{+} . Для L_{-} анализ абсолютно идентичен, поэтому не будем заострять своё внимание на нём.

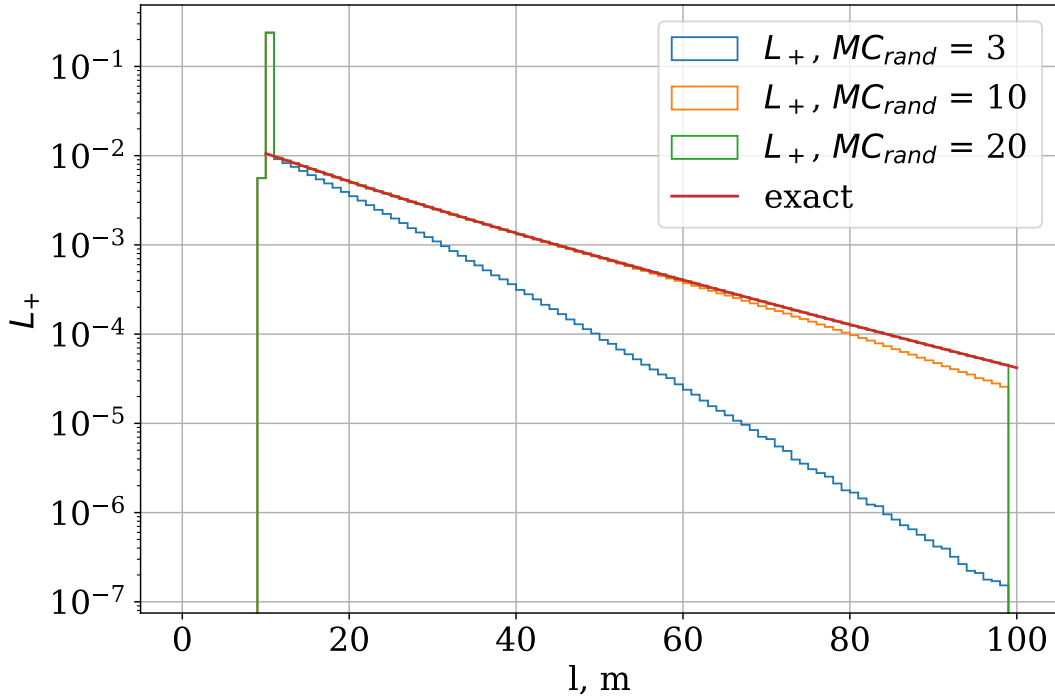


Рисунок 2.2 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

Посмотрим на изначальное уравнение (2.1). Если попытаться записать решение в виде ряда по количеству рассеяний, то это был бы ряд по параметру μ_s с некоторым множителем за суммой. Каким должен быть этот множитель для стандартной схемы Монте-Карло? Во-первых, за суммой должен находиться множитель, связанный с поглощением, т.е. $e^{-\mu_a l}$. Он одинаковый для произвольного числа рассеяний, поэтому его можно вынести за сумму. Далее, на каждом шаге фотон распространяется со случайной длиной, которая имеет экспоненциальную плотность распределения, пропорциональную $e^{-\mu_s l}$. Поэтому соответствующая плотность, одинаковая для всех рассеяний, также вынесется за сумму. Таким образом, приходим к тому, что процедура Монте-Карло соответствует следующему разложению:

$$L_{\pm}(l, x) = e^{-(\mu_a + \mu_s)l} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_s^n L_{\pm}^{(n)}(l, x), \quad (2.48)$$

где $L_{\pm}^{(n)}(l, x)$ соответствует потоку фотонов после n событий рассеяния. Подробный поиск такого разложения можно найти в Приложении А. Здесь же

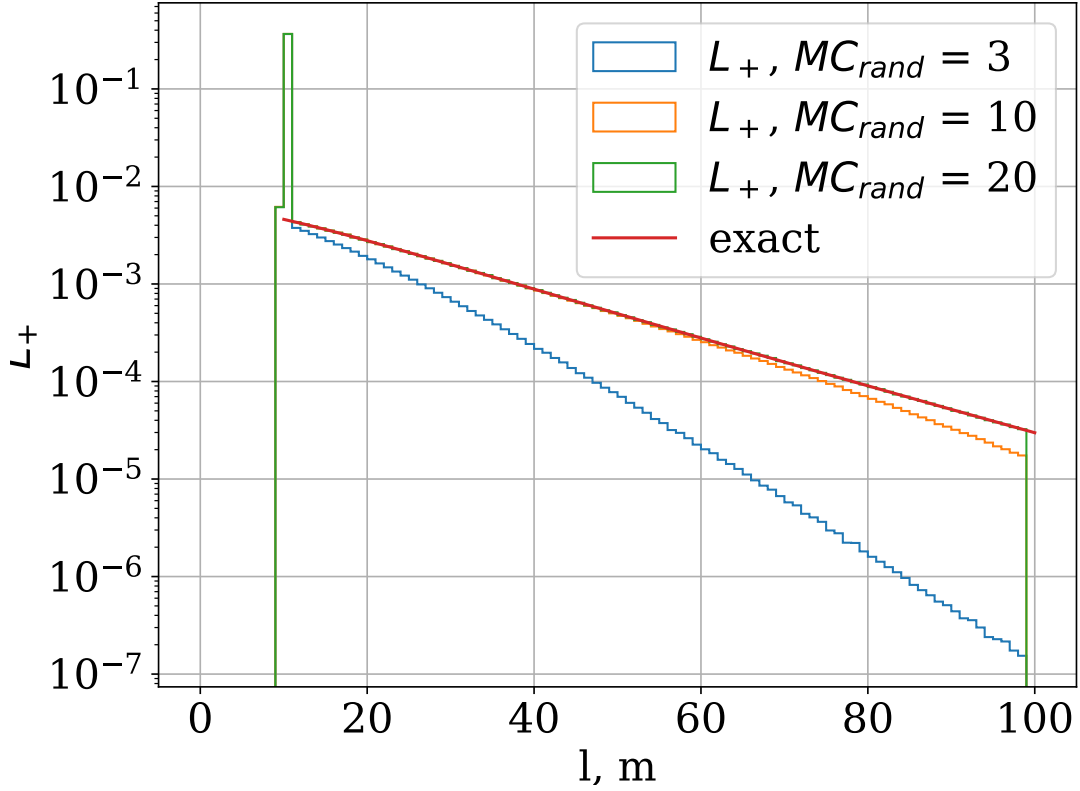


Рисунок 2.3 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

приведем конечный результат (при $g \neq -1$):

$$\begin{aligned}
 L_+^{(0)} &= \delta(l - x), \\
 L_+^{(1)} &= \frac{(1+g)l}{2} \delta(l - x), \\
 L_+^{(n)} &= \frac{l^n (1+g)^n}{2^n n!} \delta(l - x) + \tilde{\Theta}(\tau^2)(l+x) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{4} (1-g)^2 l^{n-2} (1+g)^{n-2} \frac{F_1(a, b; 2; 4z^2)}{2^{n-2} (n-2)!},
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

где $z = \frac{(1-g)}{2(1+g)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$ и $F_1(a, b, c, x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса. Параметры a и b определяются следующим образом: Для четного n :

$$a = \frac{3-n}{2}, \quad b = -\frac{n-2}{2}. \tag{2.50}$$

Для нечетного n :

$$a = -\frac{n-2}{2}, \quad b = \frac{3-n}{2}. \tag{2.51}$$

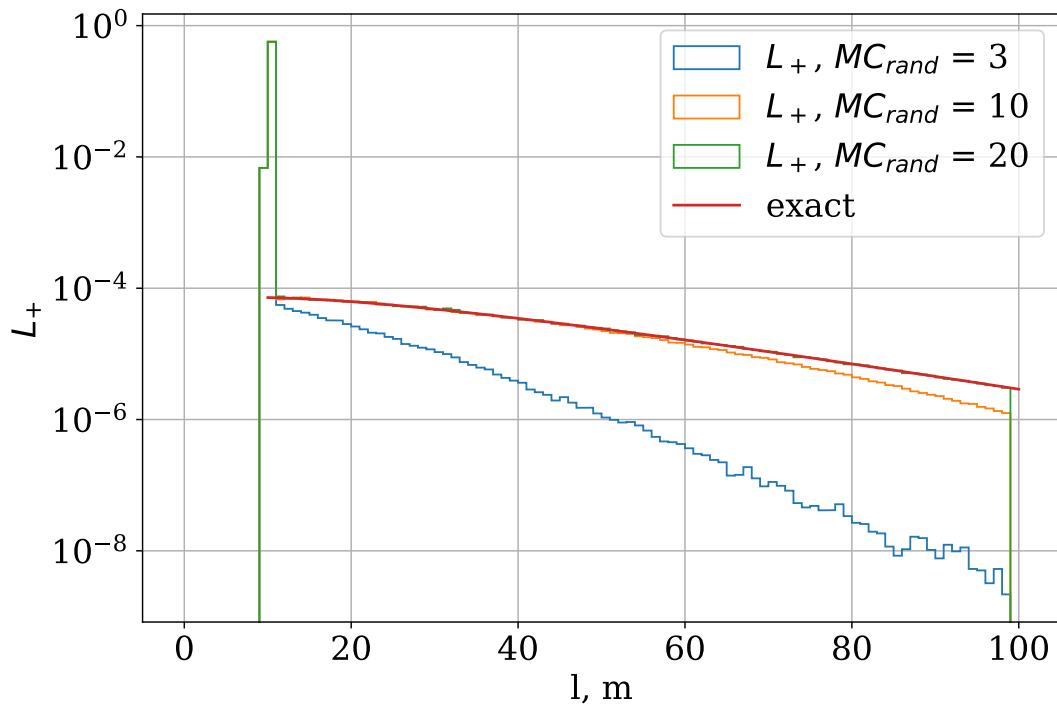


Рисунок 2.4 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

Можно видеть, сравнивая порядки по этим формулам, с порядками схемы Монте-Карло, как хорошо совпадает данное разложение с оценкой Монте-Карло. Здесь опять взято $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9, 0, 0.9$.

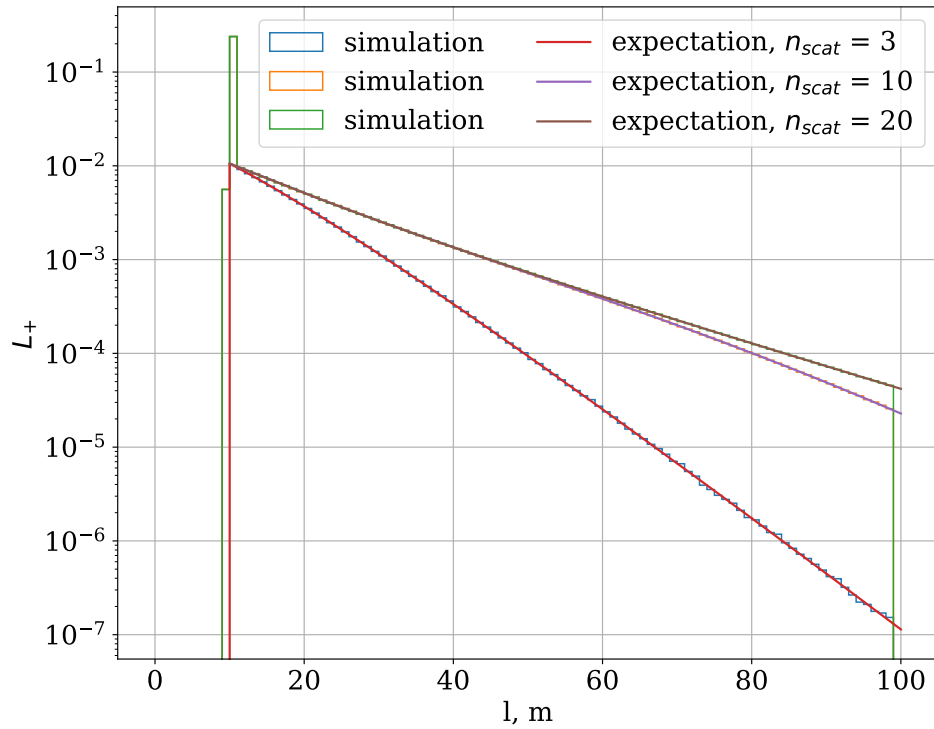


Рисунок 2.5 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{scat} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

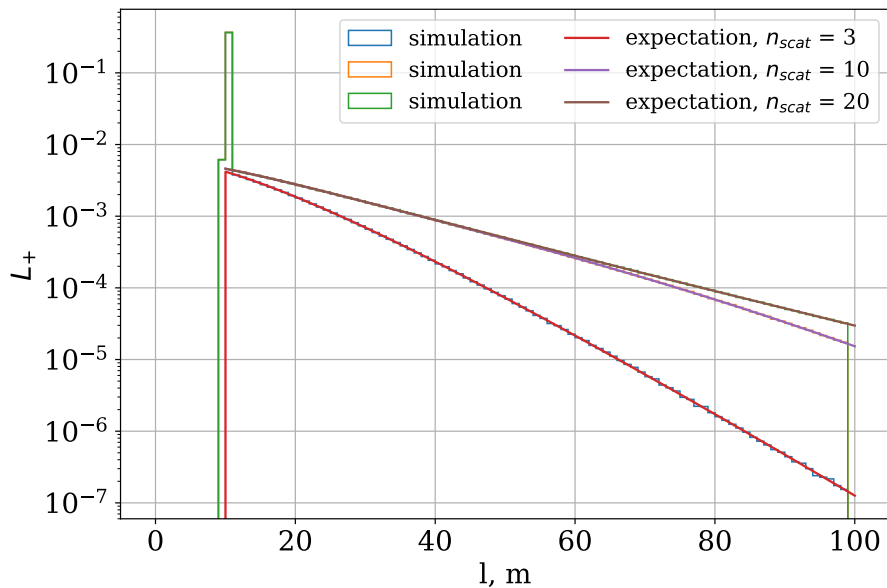


Рисунок 2.6 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{scat} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

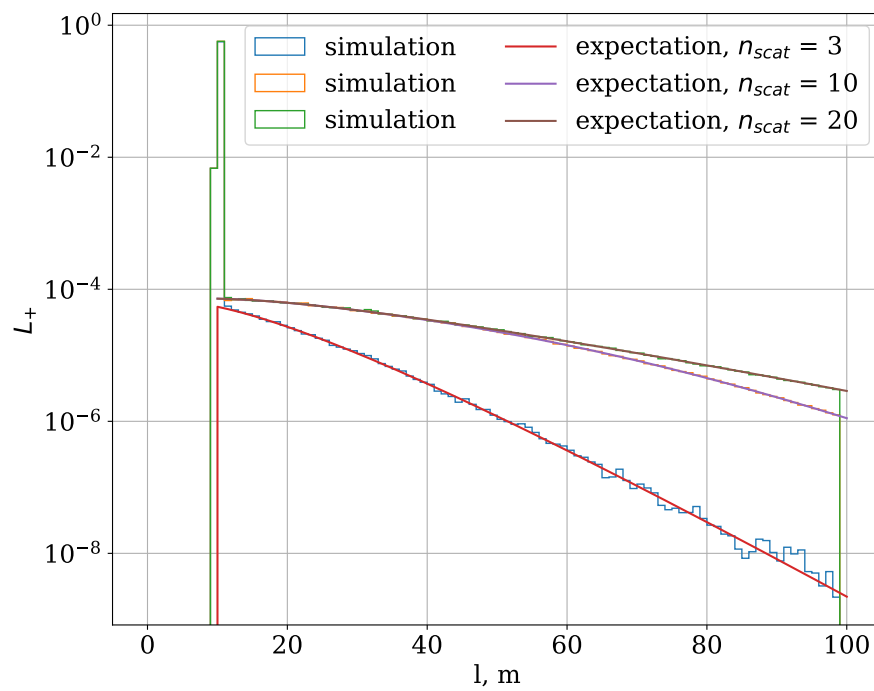


Рисунок 2.7 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{scat} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

Однако, можно заметить, что для найденного аналитического решения есть более естественное разложение. Оно имеет следующий вид:

$$L_{\pm}(l, x) = e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu'_s}{2}\right)^n \tilde{L}_{\pm}^{(n)}(l, x). \quad (2.52)$$

Отсылая к подробным вычислениям в Приложение А, приведем сразу ответ:

$$L_+^{(n)}(x, l) = \begin{cases} \delta(l - x), & n = 0 \\ 0, & n \text{ is odd} \\ \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\tau^{n-1}}{(n/2-1)!(n/2)!}, & n \text{ is even} \end{cases} \quad (2.53)$$

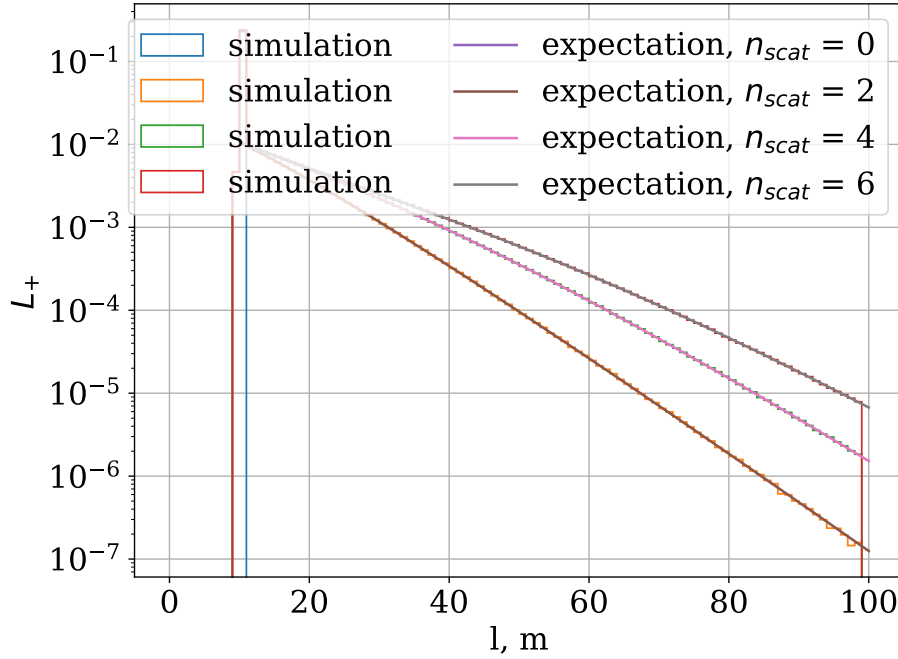


Рисунок 2.8 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_{\gamma} = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

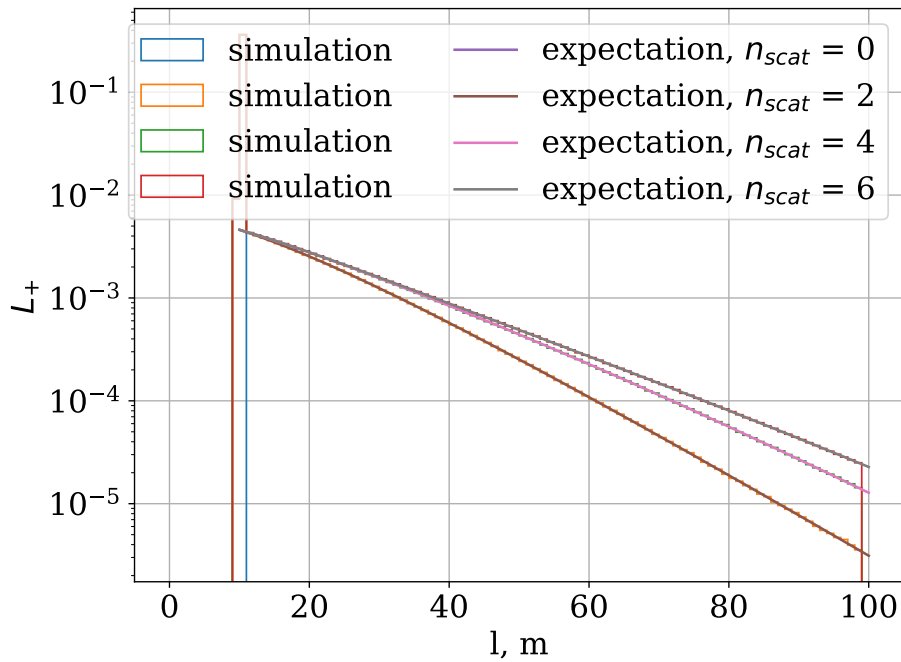


Рисунок 2.9 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05 \text{m}^{-1}$, $\mu_s = 0.1 \text{m}^{-1}$ и $x = 10 \text{m}$.

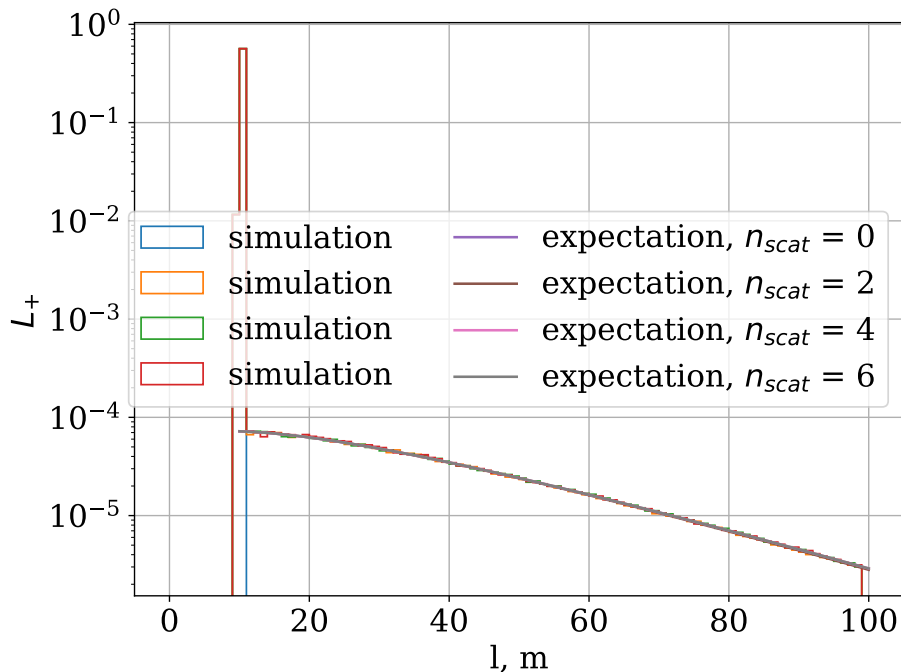


Рисунок 2.10 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05 \text{m}^{-1}$, $\mu_s = 0.1 \text{m}^{-1}$ и $x = 10 \text{m}$.

2.6 Монте-Карло с повышенной сходимостью

Разложение (2.52) подсказывает, что можно улучшить сходимость ряда Монте-Карло, так как ряд (2.52) сходится намного быстрее ряда (2.48). Для этого надо сделать замену $\mu_s \rightarrow \mu'_s/2$. А как изменится g ? Из разложения (2.52) видно, что амплитуды разложения не зависят от g . Значит, g одинаково для всех μ_s . Более того, если в формуле (2.1) положить $g = -1$ и попробовать сделать разложение вида (2.48), то будет получено разложение вида (2.52).

Таким образом можно прийти к выводу, что метод Монте-Карло для одномерной задачи переноса с более быстрой сходимостью получается заменой $(\mu_s, g) \rightarrow (\mu'_s, -1)$. Более быструю сходимость ускоренного метода Монте-Карло и соответствие ускоренной схемы формулам (2.53) можно увидеть на (рис. 2.8 - рис. 2.13).

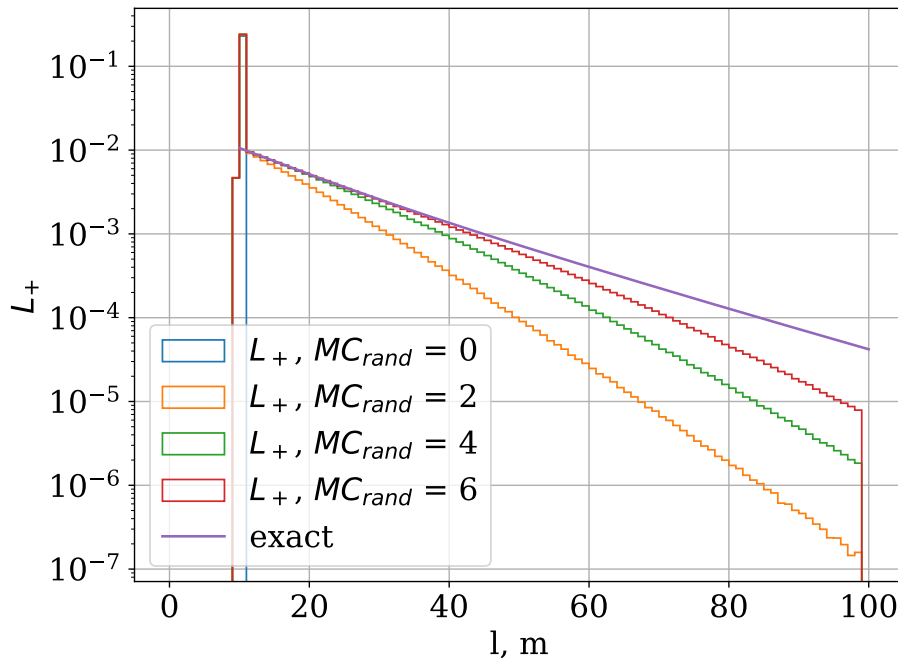


Рисунок 2.11 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

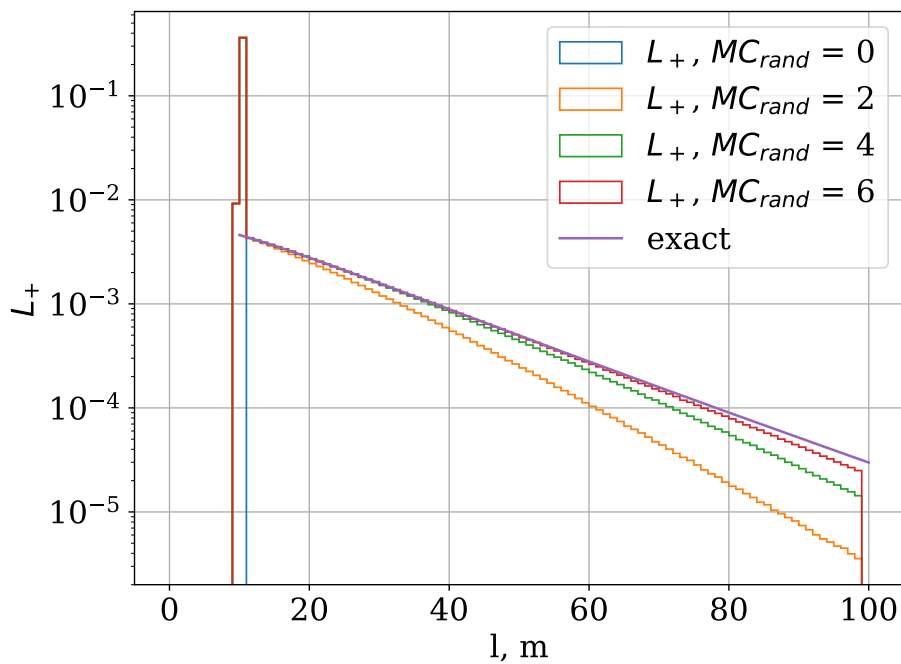


Рисунок 2.12 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05\text{m}^{-1}$, $\mu_s = 0.1\text{m}^{-1}$ и $x = 10\text{m}$.

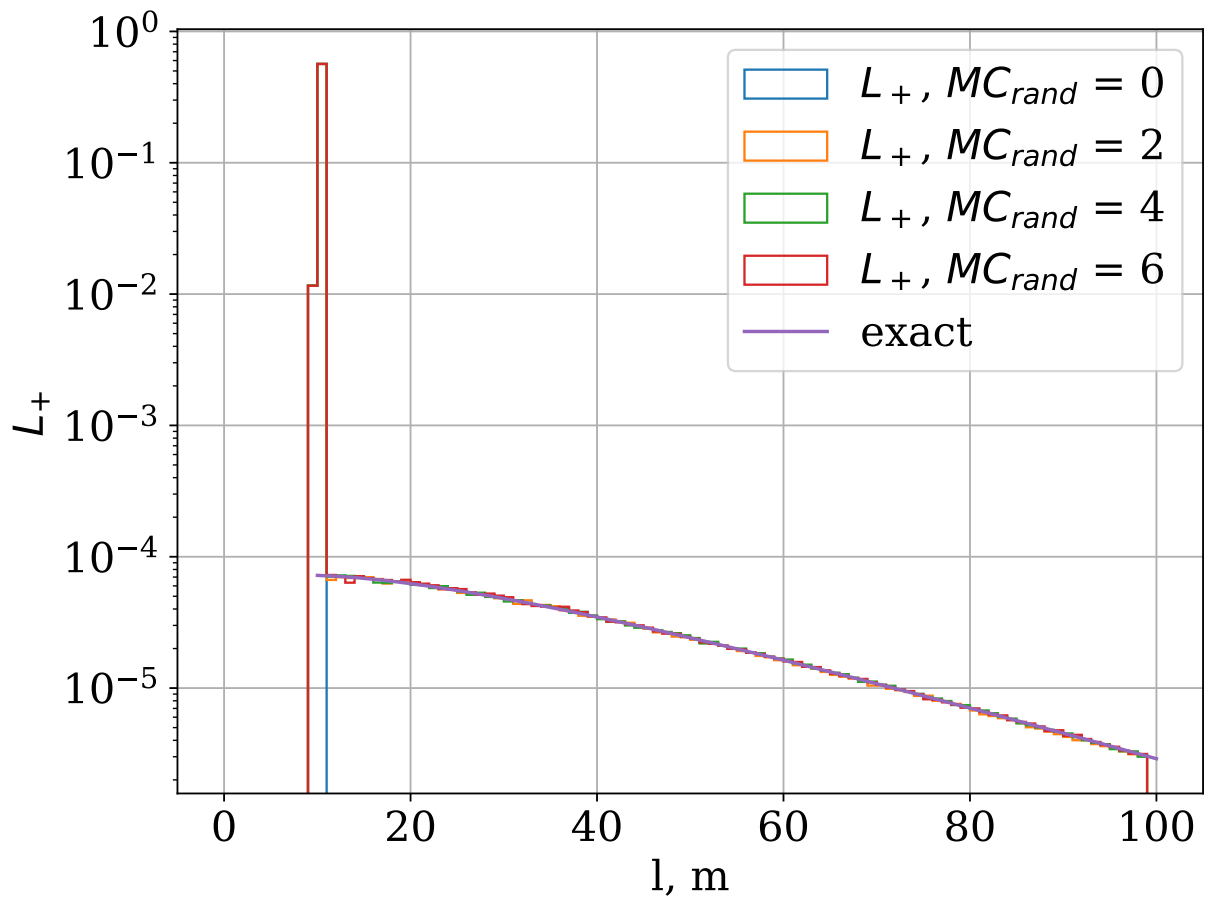


Рисунок 2.13 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

2.7 Резюме

В данной главе была поставлена одномерная задача переноса

$$(\partial_l + s\partial_x + \mu_t) L(l, x, s) = \mu_s \sum_{s'=\pm 1} P(s, s') L(l, x, s'), \quad (2.54)$$

с функцией рассеяния

$$\begin{aligned} P(+1, +1) &= P(-1, -1) = \frac{1+g}{2}, \\ P(+1, -1) &= P(-1, +1) = \frac{1-g}{2}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Было найдено решение данной задачи через модифицированные функции Бесселя:

$$\begin{aligned} L(l, x, +1) &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \times \left(\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu'_s}{4} I_1(\mu'_s \tau/2) \right), \\ L(l, x, -1) &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \tilde{\theta}(\tau^2) \frac{\mu'_s}{4} I_0(\mu'_s \tau/2), \end{aligned} \quad (2.56)$$

где

$$\tilde{\theta}(\tau^2) = (1 - \theta(-\tau^2)), \quad (2.57)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \tilde{\theta}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

и

$$\mu'_s = \mu_s(1-g), \quad \tau = \sqrt{l^2 - x^2}. \quad (2.59)$$

Также были найдены пространственные моменты в зависимости от времени:

$$\begin{aligned} \langle x^{2m}(l) \rangle_+ &= l^{2m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) I_{m-\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{m-\frac{1}{2}}} e^{-\gamma}, \\ \langle x^{2m+1}(l) \rangle_+ &= l^{2m+1} \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2}) I_{m+\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{m+\frac{1}{2}}} e^{-\gamma}, \\ \langle x^{2m}(l) \rangle_- &= l^{2m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) I_{m+\frac{1}{2}}(\gamma)}{(\gamma/2)^{m-\frac{1}{2}}} e^{-\gamma}, \\ \langle x^{2m+1}(l) \rangle_- &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где

$$\gamma = \mu'_s l/2. \quad (2.61)$$

Отдельно было показано, что при малых временах ($l \ll (\mu'_s)^{-1}$) выделяется режим переноса, а при больших временах ($l \gg (\mu'_s)^{-1}$) реализуется режим диффузии. Было произведено сравнение полученного решения с методом Монте-Карло. На основании полученных формул были получены формулы для потока света, получаемого при моделировании методом Монте-Карло с фиксированным числом рассеяний.

Также на основании аналитического решения задачи был предложен метод для более эффективного моделирования методом Монте-Карло, произведено его сравнение с аналитическим решением.

Глава 3. Трехмерное уравнение переноса излучения

Теперь перейдем к трехмерной задаче переноса излучения. Уравнение в трехмерном случае имеет следующий вид:

$$\hat{K}L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + \mu_s \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (3.1)$$

где

$$\hat{K} \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla + \mu_t \right) \quad (3.2)$$

дифференциальный оператор с частными производными, $\hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'}$ -интеграл столкновения, определенный как

$$\hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} f(\hat{\mathbf{s}}') \equiv \int_{4\pi} d\hat{\mathbf{s}}' g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') f(\hat{\mathbf{s}}'), \quad (3.3)$$

$S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ -функция источника, которая известна заранее, c — скорость света в среде, $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ полный коэффициент затухания, являющийся суммой обратной длины поглощения (коэффициент поглощения) μ_a и обратной длины рассеяния (коэффициента рассеяния) μ_s . Функция $g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ это плотность вероятности того, что направление фотона $\hat{\mathbf{s}}$ после рассеяния сменится на $\hat{\mathbf{s}}'$.

От функции $g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ зависит вся сложность задачи. Для простых функций рассеяния данная задача будет решаться просто, для сложных функций — решения может не существовать в аналитическом виде.

3.1 Функция рассеяния

В дальнейшем будем проводить численное сравнение для конкретной функции рассеяния — функции Хеньи-Гринштейна. Она имеет следующий вид:

$$g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = g(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\mu)^{3/2}}, \quad (3.4)$$

где $\mu = \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$ и g - параметр анизотропии (средний косинус рассеяния). Добавим еще функцию рассеяния по углу φ (она изотропна и равна $1/(2\pi)$). В итоге

получаем следующую функцию рассеяния:

$$g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'))^{3/2}}. \quad (3.5)$$

Функция Хеньи-Гринштейна универсальна. Приведем небольшую таблицу, показывающую частные случаи при разных параметрах анизотропии:

g	$g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}'; g)$	Разложение по сферическим функциям
-1	$\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}}')$	$\sum_{nm} (-1)^n Y_{nm}^*(\hat{\mathbf{s}}) Y_{nm}(\hat{\mathbf{s}}')$
0	$1/(4\pi)$	$Y_{00}^*(\hat{\mathbf{s}}) Y_{00}(\hat{\mathbf{s}}')$
1	$\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}')$	$\sum_{nm} Y_{nm}^*(\hat{\mathbf{s}}) Y_{nm}(\hat{\mathbf{s}}')$

Таблица 1 — Предельные случаи для функции Хеньи-Гринштейна

У функции Хеньи-Гринштейна есть много интересных свойств, которые будут рассмотрены в одной из глав этой части работы, а также в приложении к данной работе. Зависимость $g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ от косинуса угла рассеяния можно увидеть на (Рис. 3.1)

3.2 Итеративная схема решения трехмерного уравнения переноса

Решим уравнение (3.1). Сначала избавимся от последнего слагаемого в (3.2). Для этого сделаем следующую замену:

$$L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = e^{-\mu_t ct} G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \quad (3.6)$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \right) G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + \mu_s \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (3.7)$$

где

$$A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = e^{\mu_t ct} S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}). \quad (3.8)$$

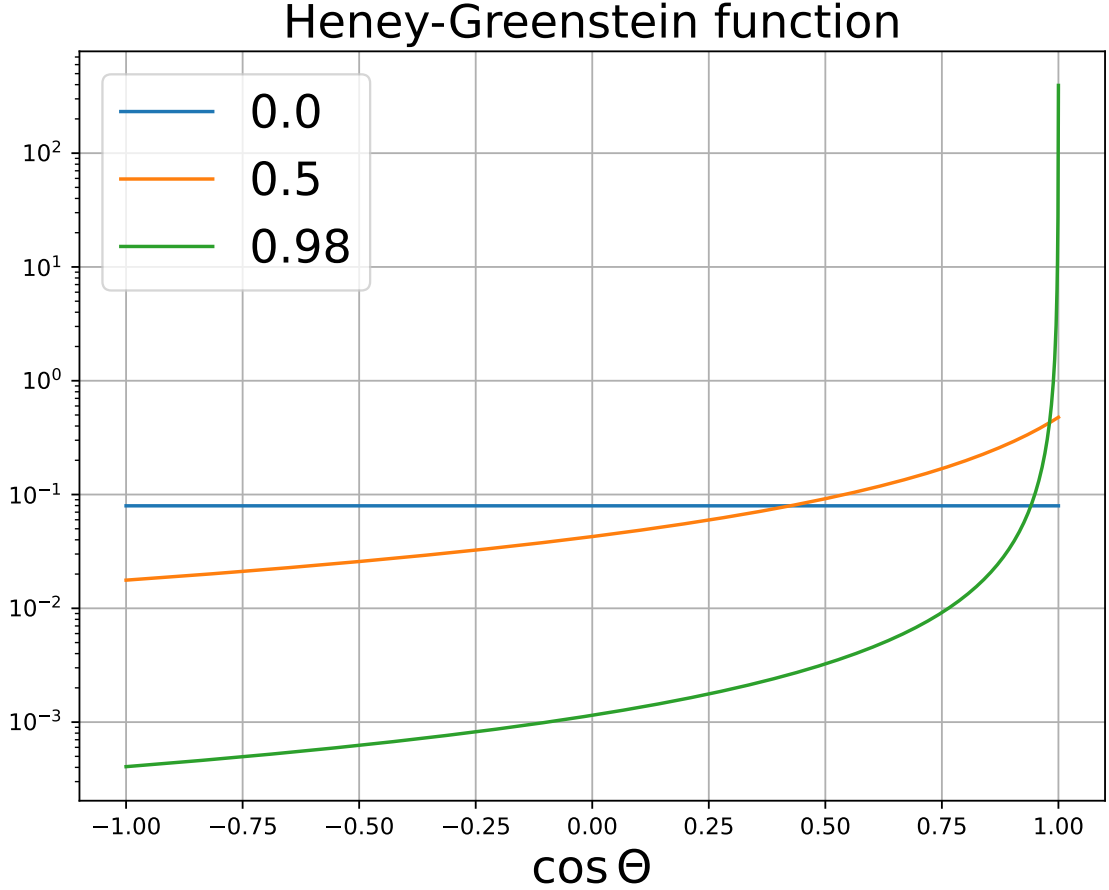


Рисунок 3.1 — Зависимость функции Хеньи-Гринштейна от косинуса угла рассеяния для $g = 0, 0.5, 0.98$

Одна из проблем в этом уравнении — наличие вектора $\hat{\mathbf{s}}$ в левой части. Чтобы избавиться от него, сделаем замену координат $(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\mathbf{r}', t')$:

$$t \rightarrow t' = t, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}t. \quad (3.9)$$

Далее, учтем тождество

$$\frac{\partial}{\partial t'} f(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t') = c\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla f(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Тогда левую часть уравнения можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t'} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \right) G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{\partial}{\partial t'} [G(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t', \hat{\mathbf{s}})]. \quad (3.11)$$

Итак, после всех преобразований, уравнение примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t'} [G(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t', \hat{\mathbf{s}})] = A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + \mu_s \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t, t, \hat{\mathbf{s}}) &= G(\mathbf{r}', 0, \hat{\mathbf{s}}) + \int_0^t dt' cA(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t', \hat{\mathbf{s}}) \\
&+ c\mu_s \int_0^t dt' \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} G(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t', \hat{\mathbf{s}}').
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Предположим, что $G(\mathbf{r}', 0, \hat{\mathbf{s}}) = 0$. Даже если это условие не выполняется, всегда можно добавить начальное условие в источник как дополнительное слагаемое вида $\Delta S(\mathbf{r}', t', \hat{\mathbf{s}}) = G(\mathbf{r}', 0, \hat{\mathbf{s}})\delta(t)$. Учитывая это обстоятельство, можно переписать задачу (3.13) в интегральном виде:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t, t, \hat{\mathbf{s}}) &= \int_0^t dt' cA(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t', \hat{\mathbf{s}}) \\
&+ c\mu_s \int_0^t dt' \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} G(\mathbf{r}' + c\hat{\mathbf{s}}t', t', \hat{\mathbf{s}}').
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Возвращая старые аргументы, получаем:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= \int_0^t dt' cA(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t'), t', \hat{\mathbf{s}}) \\
&+ c\mu_s \int_0^t dt' \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} G(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t'), t', \hat{\mathbf{s}}').
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Именно это уравнение и будет в дальнейшем использоваться для нахождения решения.

Решение уравнения (3.15) будем искать с помощью итераций:

$$G^{(n)} = G^{(n-1)} + \delta G^{(n)}, \tag{3.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta G^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= c\mu_s \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} \int_0^t dt' \delta G^{(n-1)}(\mathbf{r}', t', \hat{\mathbf{s}}') \\
&= c\mu_s \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}' g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \int_0^t dt' \delta G^{(n-1)}(\mathbf{r}', t', \hat{\mathbf{s}}'),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
G_0(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= \int_0^t dt' cA(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t'), t', \hat{\mathbf{s}}) \\
&= \int_0^t dt' ce^{\mu_s ct'} S(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t'), t', \hat{\mathbf{s}}),
\end{aligned}$$

где введено обозначение $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t')$, во второй строке (3.17) ведется интегрирование по двумерной сфере и точное решение, даваемое такой схемой есть $G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$.

Распишем явно первые несколько порядков, получаемых в рамках данной схемы. Для нулевого порядка имеем, что

$$\begin{aligned}\delta G^{(-1)} &\equiv 0, \\ G^{(0)} &= \delta G^{(0)} = G_0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Первый порядок мы можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}G^{(1)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= G_0 + c\mu_s \int_0^t dt_1 \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_1} G_0(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1), t_1, \hat{\mathbf{s}}_1) \\ &= G_0 + c\mu_s \int_0^t dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) G_0(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1), t_1, \hat{\mathbf{s}}_1).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Для второго порядка будет верным следующее выражение:

$$\begin{aligned}G^{(2)} &= G^{(1)} + (c\mu_s)^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_2} \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_1} \times \\ &\quad \times G_0(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_2(t_2 - t_1), t_1, \hat{\mathbf{s}}_1) \\ &= G^{(1)} + (c\mu_s)^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2) \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) \times \\ &\quad \times G_0(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_2(t_2 - t_1), t_1, \hat{\mathbf{s}}_1).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Соответственно, третий порядок принимает следующую форму:

$$\begin{aligned}G^{(3)} &= G^{(2)} + (c\mu_s)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ &\quad \times \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_3} \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_2} \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_1} G_0(\mathbf{r}', t_1, \hat{\mathbf{s}}_1) \\ &= G^{(2)} + (c\mu_s)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_3 g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_3) \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 g(\hat{\mathbf{s}}_3, \hat{\mathbf{s}}_2) \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) G_0(\mathbf{r}', t_1, \hat{\mathbf{s}}_1),\end{aligned}\tag{3.21}$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) - c\hat{\mathbf{s}}_3(t_3 - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_2(t_2 - t_1)$.

Из формул выше становится очевидной структура произвольного порядка:

$$\begin{aligned}
G^{(n)} &= G^{(n-1)} + \delta G^{(n)}, \text{ где} \\
\delta G^{(n)} &= (c\mu_s)^n \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \times \left(\prod_{j=1}^n \hat{V}_{\hat{s}_{j+1}\hat{s}_j} \right) L_0(\mathbf{r}', t_1, \hat{\mathbf{s}}_1) \\
&= (c\mu_s)^n \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \times \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{s}_j g(\hat{s}_{j+1}, \hat{s}_j) \right) L_0(\mathbf{r}', t_1, \hat{\mathbf{s}}_1), \quad (3.22)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_n) - c\hat{\mathbf{s}}_n(t_n - t_{n-1}) - \dots$

$$\dots - c\hat{\mathbf{s}}_2(t_2 - t_1) = \mathbf{r} - \sum_{k=1}^n c\hat{\mathbf{s}}_{n+1}(t_{n+1} - t_n).$$

В формуле (3.22) было определено $t = t_{n+1}$ и $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1}$.

3.2.1 Общая формула

Формулу (3.22) неудобно использовать как численно, так и аналитически из-за зацепляющихся пределов интегрирования. Получим формулу, где пределы интегрирования не зависят от переменных интегрирования. Для этого сделаем замену переменных. А именно, введем новые переменные $\xi_k = 1 - \frac{t_k}{t_{k+1}}$. Тогда в формуле (3.22) возникнет дополнительный множитель, связанный с якобианом перехода

$$dt_1 \dots dt_n = J_n d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (3.23)$$

где, как было сказано ранее, J_n это определитель матрицы Якоби.

$$J_n = \frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}. \quad (3.24)$$

Подробный расчет данного якобиана произведен в Приложении А. Здесь мы приведем конечный результат:

$$J_n = t^n \prod_{k=1}^n (1 - \xi_k)^{k-1}. \quad (3.25)$$

Заметим, что пределы интегрирования для новых переменных являются просто отрезками $[0,1]$, а вся область интегрирования по времени (с учетом переориентации объема интегрирования — за нее отвечали минусы в якобиане перехода)

есть $I_n = [0,1]^n$. Также будет полезным следующее выражение:

$$\begin{aligned} t_{k+1} - t_k &= t_{k+1} \xi_k \\ &= t(1 - \xi_n)(1 - \xi_{n-1}) \dots (1 - \xi_{k+1}) \xi_k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.22), получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \delta G^{(n)} &= (c\mu_s t)^n \left(\prod_{i=1}^n \int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_k)^{k-1} \right) \times \\ &\times \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) G_0(\mathbf{r}', t_1, \hat{\mathbf{s}}_1), \text{ где } \mathbf{r}' = \mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)}, \\ \mathbf{s}^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_{n-k} \xi_{n-k} \left(\prod_{i=1}^k (1 - \xi_{n-i+1}) \right) = \hat{\mathbf{s}}_n \xi_n \\ &+ \hat{\mathbf{s}}_{n-1} \xi_{n-1} (1 - \xi_n) + \dots + \hat{\mathbf{s}}_1 \xi_1 (1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_2) \\ &+ \hat{\mathbf{s}}_0 \xi_0 (1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.2 Дельтаобразный источник

Рассмотрим важный случай — дельтаобразный источник. Решив задачу для дельтаобразного источника, мы найдем функцию Грина данной задачи и будем способны решить ее для произвольного источника.

Дельтаобразный по всем переменным источник имеет следующий вид:

$$S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \delta^3(\mathbf{r}) \delta(t) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \quad (3.28)$$

Он соответствует одному фотону, рожденному в начальный момент времени $t = 0$ в точке $\mathbf{r} = 0$, движущемуся вдоль направления $\hat{\mathbf{s}}_0$.

Найдем выражение для $G_0(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$. Воспользуемся для этого второй формулой из (3.17):

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= \int_0^t dt' ce^{\mu_t ct'} S(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t'), t', \hat{\mathbf{s}}) \\ &= \int_0^t dt' ce^{\mu_t ct'} \delta(t') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t')) \delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= c\delta^{(3)}(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}t) \delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для $L_0(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L_0 = ce^{-c\mu t} \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= ce^{-c\mu t} \frac{\delta(r - ct)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Аналогично, можно выписать выражения сразу для следующих трех порядков:

$$L^{(1)} = L^{(0)} + c^2 \mu_s e^{-c\mu t} g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \int_0^t dt_1 \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1)), \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= L^{(1)} + c^3 \mu_s^2 e^{-c\mu t} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int d\hat{\mathbf{s}}_1 g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\times \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} L^{(3)} &= L^{(2)} + c^4 \mu_s^3 e^{-c\mu t} \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ &\times \int d\hat{\mathbf{s}}_1 d\hat{\mathbf{s}}_2 g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2) g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) - c\hat{\mathbf{s}}_2(t_3 - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Обсудим физический смысл этих выражений:

1) Нулевой порядок $L^{(0)}$ соответствует прямой траектории фотона (так называемое баллистическое решение), соответствующее прямой линии $\mathbf{r}(t) = c\hat{\mathbf{s}}_0 t$ с неизменным направлением $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0$. Если мы определим проинтегрированную по конечным направлениям плотность потока как

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} d\hat{\mathbf{s}} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \quad (3.34)$$

и полный интегральный поток как

$$F(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (3.35)$$

Тогда для этих функций в нулевом порядке имеем:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= c \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} e^{-c\mu t} \frac{\delta(r - ct)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= ce^{-c\mu t} \frac{\delta(r - ct)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \end{aligned} \quad (3.36)$$

и

$$\begin{aligned} F^{(0)}(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty dt ce^{-c\mu t} \frac{\delta(r - ct)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= \frac{e^{-\mu r}}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0). \end{aligned} \quad (3.37)$$

2) Первый порядок $L^{(1)}$ — это сумма $L^{(0)}$ и вклада одного рассеяния. Рассеяние происходит в момент времени t_1 , и в этот момент начальное направление $\hat{\mathbf{s}}_0$ изменяется на $\hat{\mathbf{s}}$, и фотон в этом направлении движется к конечной точке. За время $t - t_1$ он достигает точку \mathbf{r} уже без рассеяния и поглощения. Траектория, по которой движется фотон, закодирована в выражении $c\mu_s e^{-c\mu_s t} g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1))$, а именно в аргументе дельта-функции. Действительно, аргумент дельта функции подразумевает, что $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 + c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1)$ — кусочное задание кривой двумя прямыми линиями с направляющими $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{s}}_0$.

3) Второй порядок $L^{(2)}$ является суммой слагаемого без рассеяния, слагаемого с одним рассеянием и слагаемого с двумя рассеяниями. Фотон с начальным направлением $\hat{\mathbf{s}}_0$ в момент времени t_1 изменяет свое направление на произвольное направление $\hat{\mathbf{s}}_1$ с вероятностью $g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) d\hat{\mathbf{s}}_1$. Затем, по прошествии $t_2 - t_1$ снова случается рассеяние, и направление изменяется на $\hat{\mathbf{s}}$. Вероятность этого есть $g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1)$. После этого фотон распространяется до точки \mathbf{r} без рассеяния и поглощения. И опять вся информация о траектории содержится в аргументе дельта-функции $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) + c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) + c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1$.

Стоит заметить, что функция $G(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ содержит информацию только о рассеянии, вся информация о поглощении содержится в соответствующем экспоненциальном факторе $e^{-\mu_a c t}$.

Остальные порядки рассеяния следуют такому же шаблону (аналогично диаграммам Фейнмана в квантовой теории поля) и записать формулу для соответствующего порядка не составляет проблем. На самом деле (смотрите в Приложении А), соответствующие формулы можно получить, основываясь только на элементарной теории вероятностей. Соответствующие диаграммы для первых трех порядков можно увидеть ниже на рис. (3.2).

Итак, в общем виде можно записать решение в следующем виде:

$$L = L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta L^{(n)}. \quad (3.38)$$

Применим формулу (3.27) к дельтаобразному источнику. Получим следующую формулу:

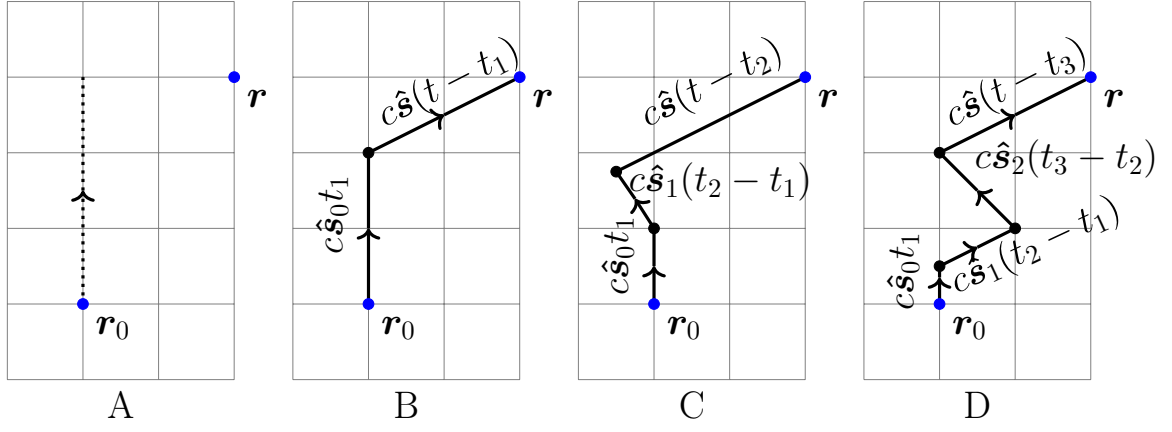


Рисунок 3.2 — Четыре примера возможных траекторий для фотона, рожденного при $t = 0$ в \mathbf{r}_0 с начальным направлением $\hat{\mathbf{s}}_0$, приводящих \mathbf{r} в момент времени t с направлением $\hat{\mathbf{s}}$: (A) Без рассеяний, при условии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + c\hat{\mathbf{s}}(t - t_0)$ и $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0$. (B) с одним рассеянием в направлении $\hat{\mathbf{s}}$ в момент времени t_1 , причем $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 + c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1)$. (C) С двумя рассеяниями. Первое произошло в момент t_1 в произвольном направлении $\hat{\mathbf{s}}_1$. Второе произошло в момент t_2 в направлении $\hat{\mathbf{s}}$, что в итоге приводит в точку $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) + c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) + c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1$. (D) С тремя рассеяниями. Первое произошло в момент времени t_1 в произвольном направлении $\hat{\mathbf{s}}_1$. Второе произошло в момент времени t_2 в произвольном направлении $\hat{\mathbf{s}}_2$. Третье произошло в момент времени t_3 в направлении $\hat{\mathbf{s}}$, что в итоге приводит в точку $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) + c\hat{\mathbf{s}}_2(t_3 - t_2) + c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) + c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1$.

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} = & (\mu_s c t)^n e^{-c\mu_a t} \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ & \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) \right) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) c \delta^3(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Эта формула может быть переписана в более симпатичном виде:

$$\delta L^{(n)} = e^{-\mu_a c t} \cdot P_n(\mu_s c t) \cdot \delta L_s^{(n)}, \quad (3.40)$$

где

- 1) $e^{-\mu_a c t}$ - вероятность не поглотиться фотону в течение времени t ,
- 2) $P_n(\mu_s c t)$ - вероятность для распределения Пуассона, соответствующая n случайным некоррелированным рассеяниям за время t со средним значением $\mu_s t$,

3) последний фактор, который описывает нам характер рассеяния и напрямую зависит только от источника и от функции рассеяния.

$$\begin{aligned} \delta L_s^{(n)} &= n! \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) \right) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\times c\delta^3(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_{n-k} \xi_{n-k} \left(\prod_{i=1}^k (1 - \xi_{n-i+1}) \right) \\ &= \hat{\mathbf{s}}_n \xi_n + \hat{\mathbf{s}}_{n-1} \xi_{n-1} (1 - \xi_n) + \dots \\ &+ \hat{\mathbf{s}}_1 \xi_1 (1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_2) \\ &+ \hat{\mathbf{s}}_0 \xi_0 (1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_1) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Здесь, следует положить $\xi_0 = 1$ для $t_0 = 0$.

3.2.3 Частные случаи

Поглядим на частные случаи формулы (3.39).

Случай $g = 1$

Сначала положим $g = 1$. Тогда функция Хеньи-Гринштейна превращается в дельта-функцию:

$$g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = \delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_1). \quad (3.43)$$

Отсюда получаем следующую формулу:

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) \right) = 1. \quad (3.44)$$

И, следовательно, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(n)} &= \hat{\mathbf{s}}_0 \sum_{k=0}^n \xi_{n-k} \left(\prod_{i=1}^k (1 - \xi_{n-i+1}) \right) \\ &= \hat{\mathbf{s}}_0 (\xi_n + \xi_{n-1}(1 - \xi_n) + \dots \\ &\quad + \xi_1(1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_2) \\ &\quad + \xi_0(1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_1)) = \hat{\mathbf{s}}_0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Таким образом, дельта функция перестает зависеть от аргументов интегрирования. Учтем, что

$$\prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) = \frac{1}{n!}. \quad (3.46)$$

Значит интеграл (3.41) превращается в следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta L_s^{(n)} &= n! \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) \right) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\quad \times c\delta^3(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)}) \\ &= c\delta^3(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)})\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Теперь просуммируем все порядки рассеяния. Учтем условие нормировки для распределения Пуассона:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda) = 1. \quad (3.48)$$

Таким образом, получаем:

$$L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = e^{-\mu_a ct} c\delta^3(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)})\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0). \quad (3.49)$$

Этот же результат можно получить, если изначально подставить дельтаобразную функцию рассеяния в начальное уравнение переноса.

Случай $g = 0$

Здесь, оставив все выкладки в Приложении А, приведем сразу конечный ответ:

$$L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = ce^{-\mu_t ct} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_s c)^n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \frac{\sin(ka_i ct)}{ka_i ct} e^{ik\mathbf{m}} \right), \quad (3.50)$$

где

$$a_k = \xi_k \prod_{i=1}^{n-k} (1 - \xi_{n-i+1}), \quad (3.51)$$

$$\mathbf{m} = \xi_m \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}}_0 x_{i_0} (1 - \xi_1) \dots (1 - \xi_n).$$

Случай $g = -1$

В этом случае стоит обратить внимание на то, что все движение происходит по прямой, заданной направлением $\hat{\mathbf{s}}_0$. С учетом этого мы можем использовать решение одномерной задачи, чтобы получить решение трехмерной для $g = -1$:

$$L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c \exp(-\mu_t ct) \delta^2(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{s}}_0) \frac{\delta(r - ct)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) + c \exp(-\mu_t ct) \delta^2(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{s}}_0) \frac{\tilde{\theta}(\tau^2) \mu_s}{2r^2} \sqrt{\frac{ct+r}{ct-r}} I_1(\mu_s \tau) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) + c \exp(-\mu_t ct) \delta^2(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{s}}_0) \frac{\tilde{\theta}(\tau^2) \mu_s}{2r^2} I_0(\mu_s \tau) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}}_0). \quad (3.52)$$

3.3 Наблюдаемый сигнал

При попытке численного сравнения результатов итеративной схемы с результатами процедуры Монте-Карло возникает проблема. L для дельтаобразного источника — сингулярная функция. Эта сингулярность возникает за счет

нулевого вклада (вклада без рассеяния) и за счет распространения с одним рассеянием. Поэтому, для сравнения необходимо придумать физические переменные, с помощью которых можно будет сравнить результаты, полученные с помощью интегрального уравнения с методом Монте-Карло.

Рассмотрим, детектор с фотоэффективностью, определенной с помощью функции $\varepsilon(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$, где \mathbf{r} точка на поверхности детектора, $\hat{\mathbf{s}}$ – единичный вектор направления фотона. Более того, будем рассматривать сферический детектор (например, оптические модули, использующиеся в Байкальском нейтринном телескопе, являются сферическими). Пусть центр оптического модуля находится в точке \mathbf{r}_0 , сам оптический модуль имеет радиус R . Соответствующую схему оптического модуля можно увидеть на рис.(3.3). Точки детектора (сферической

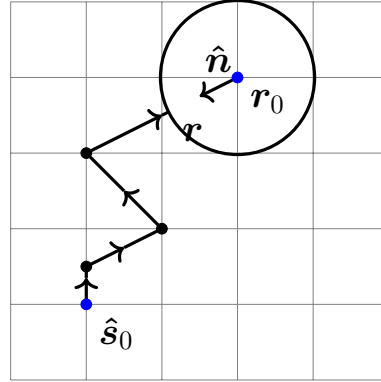


Рисунок 3.3 — Пример траектории фотона с начальным направлением $\hat{\mathbf{s}}_0$, начинающейся из точки $(0,0,0)$ и приходящей в точку \mathbf{r} на поверхности оптического модуля. Центр сферы находится в точке \mathbf{r}_0 , $\hat{\mathbf{n}}$ – единичная нормаль к поверхности оптического модуля в точке \mathbf{r} .

поверхности) можно описать вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{n}}R$, где $\hat{\mathbf{n}}$ соответствующий вектор нормали в точке \mathbf{r} . Число фотонов, приходящих на поверхность детектора в интервал времени (τ_i, τ_{i+1}) можно записать с помощью следующего интеграла:

$$\Delta N_i = R^2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} dt \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \varepsilon(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{s}}) \theta(-\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}), \quad (3.53)$$

где функция Хэвисайда $\theta(-\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}})$ необходима, чтобы откинуть фотоны, приходящие из внутренней области детектора.

Интегрирование по времени и по поверхности оптического модуля (t и $\hat{\mathbf{n}}$) снимается с помощью δ^3 -функции.

Ожидаемый сигнал от прямых фотонов (фотонов, пришедших в конечную точку без рассеяния) ($\Delta N_i^{(0)}$) и с n рассеяниями ($\Delta N_i^{(n)}$) в интервале (τ_i, τ_{i+1}) есть

$$\begin{aligned} \Delta N_i^{(0)} &= e^{-\mu_a ct^*} P_0(\mu_s ct^*) \varepsilon(\hat{\mathbf{n}}^*, \hat{\mathbf{s}}_0) \theta_i \frac{R}{\sqrt{D}}, \\ \Delta N_i^{(n)} &= \prod_{k=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_k (1 - \xi_k)^{k-1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_k g(\hat{\mathbf{s}}_k, \hat{\mathbf{s}}_{k-1}) \right) \times \\ &\times e^{-\mu_a ct^*} P_n(\mu_s ct^*) \varepsilon(\hat{\mathbf{n}}^*, \hat{\mathbf{s}}_n) \frac{n! R}{\sqrt{D}} \theta_i, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}^* &= \frac{ct^* \mathbf{s}^{(n)} - \mathbf{r}_0}{R}, \\ D &= (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}^{(n)})^2 - (\mathbf{s}^{(n)} \cdot \mathbf{s}^{(n)}) (\mathbf{r}_0^2 - R^2), \\ ct^* &= \frac{1}{\mathbf{s}^{(n)} \cdot \mathbf{s}^{(n)}} \left(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}^{(n)} - \sqrt{D} \right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

D - дискриминант соответствующего квадратного уравнения для пересечения линии и сферы (поверхности оптического модуля) и t^* - решение соответствующего квадратного уравнения, которое соответствует минимальному положительному решению. Здесь снова введено обозначение $\hat{\mathbf{s}}_n = \hat{\mathbf{s}}$, чтобы сделать формулы более компактными. Множитель

$$\theta_i = \theta(t^* - \tau_i) \theta(\tau_{i+1} - t^*) \theta(-\hat{\mathbf{n}}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_n) \theta(D) \quad (3.56)$$

является логическим условием, что время прилета расположено во временном интервале $(\tau_i \leq t^* \leq \tau_{i+1})$, фотон приходит в детектор снаружи ($\hat{\mathbf{n}}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_n < 0$) и пересечение траектории и сферы существует ($D \geq 0$).

Для прямых фотонов ($\Delta N_i^{(0)}$) нужно заменить $\mathbf{s}^{(n)} \rightarrow \mathbf{s}_0$ и $\hat{\mathbf{s}}_n \rightarrow \mathbf{s}_0$ в формулах выше.

На деле оказывается, что для численного расчета лучше использовать другую схему, приведенную в Приложении А, которая уменьшает время расчета в несколько раз.

3.4 Численное сравнение

Чтобы продемонстрировать результаты метода, основанного на уравнении переноса, рассмотрим следующий пример:

(i) Будем рассматривать источник, находящийся в точке $\mathbf{r} = (0,0,0)$, излучающий в одном направлении $\mathbf{s}_0 = (0,0,1)$ один фотон в момент времени $t = 0$.

(ii) Центр оптического модуля сферической поверхности расположен в различных точках и имеет радиус $R = 21$ см. Центры детекторов расположены в следующих точках: точки спереди $\mathbf{r}_0 = (3,0,3)$ и $\mathbf{r}_0 = (3,0,100)$ м. Точка сбоку от источника: $\mathbf{r}_0 = (3,0,0)$ м. Точка позади источника: $\mathbf{r}_0 = (3,0, -3)$ м.

(iii) Длины поглощения и рассеяния для воды выбираются равными $\mu_a^{-1} = 20.9$ м и $\mu_s^{-1} = 69.26$ м, что соответствует характеристикам воды в озере Байкал при длине волны фотона $\lambda = 488$ нм. Полные зависимости этих коэффициентов

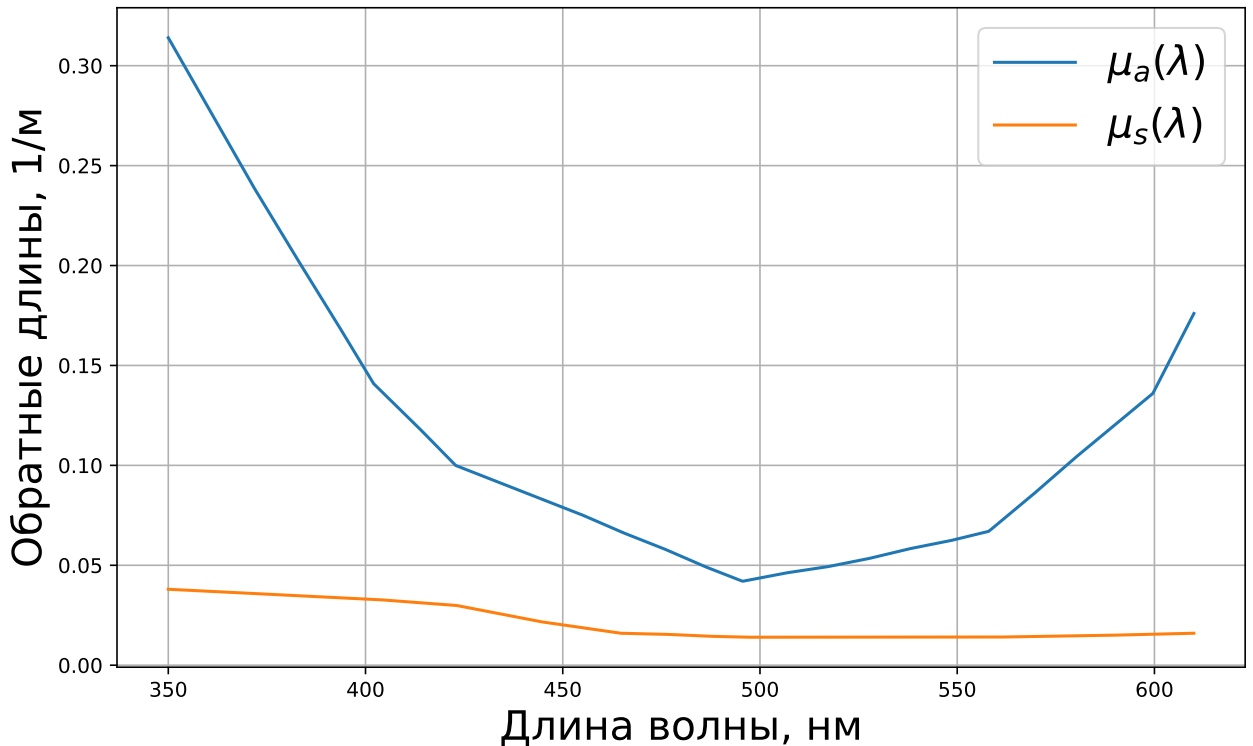


Рисунок 3.4 — Зависимость обратных длин для воды в озере Байкал для оптического диапазона длин волн.

для озера Байкал можно увидеть на рис (3.4).

(iv) Индекс преломления воды для данной длины волны есть $n = 1.366$. Полную зависимость показателя преломления для озера Байкал можно увидеть на рис (3.5)

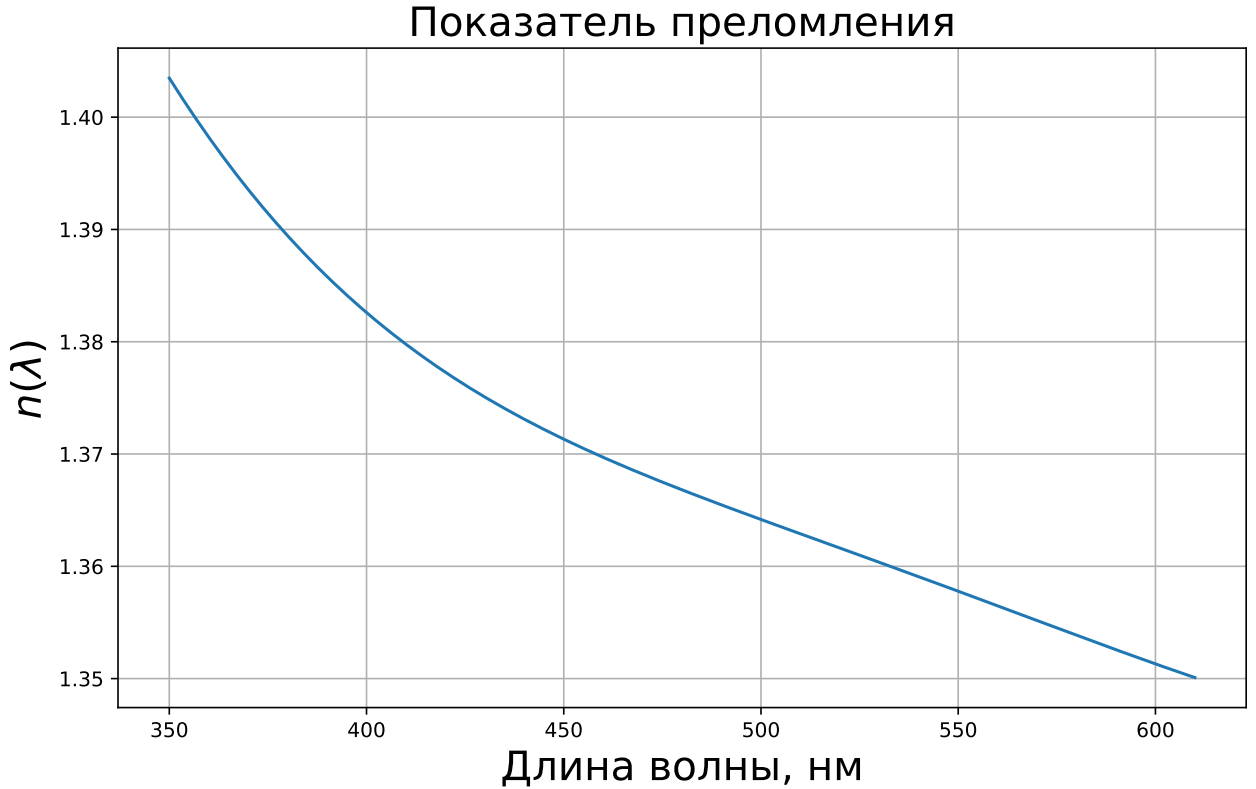


Рисунок 3.5 — Зависимость показателя преломления для воды в озере Байкал для оптического диапазона длин волн.

(v) Как уже упоминалось ранее, в качестве функции рассеяния будет использоваться функция Хеньи-Гринштейна.

$$g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = g(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\mu)^{3/2}} \quad (3.57)$$

с $\mu = \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'$ и показателем анизотропии $g = 0.9$.

Все расчеты (все необходимые многомерные интегрирования) будем проводить с помощью пакета интегрирования VEGAS, который является методом многомерного интегрирования, основанным на методах Монте-Карло [[26]].

В качестве проверки метода, основанного на уравнение переноса (далее RTE), будем использовать метод Монте-Карло, основанный на честном распространении фотонов, написанный на Python3/NumPy, который при бесконечно большой статистике дает истинный результат. На графике будем отображать

ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} , проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом распространения фотонов, основанном на Монте-Карло (MC). Ниже также приведена таблица со сравнением времени работы обычного моделирования Монте-Карло и RTE.

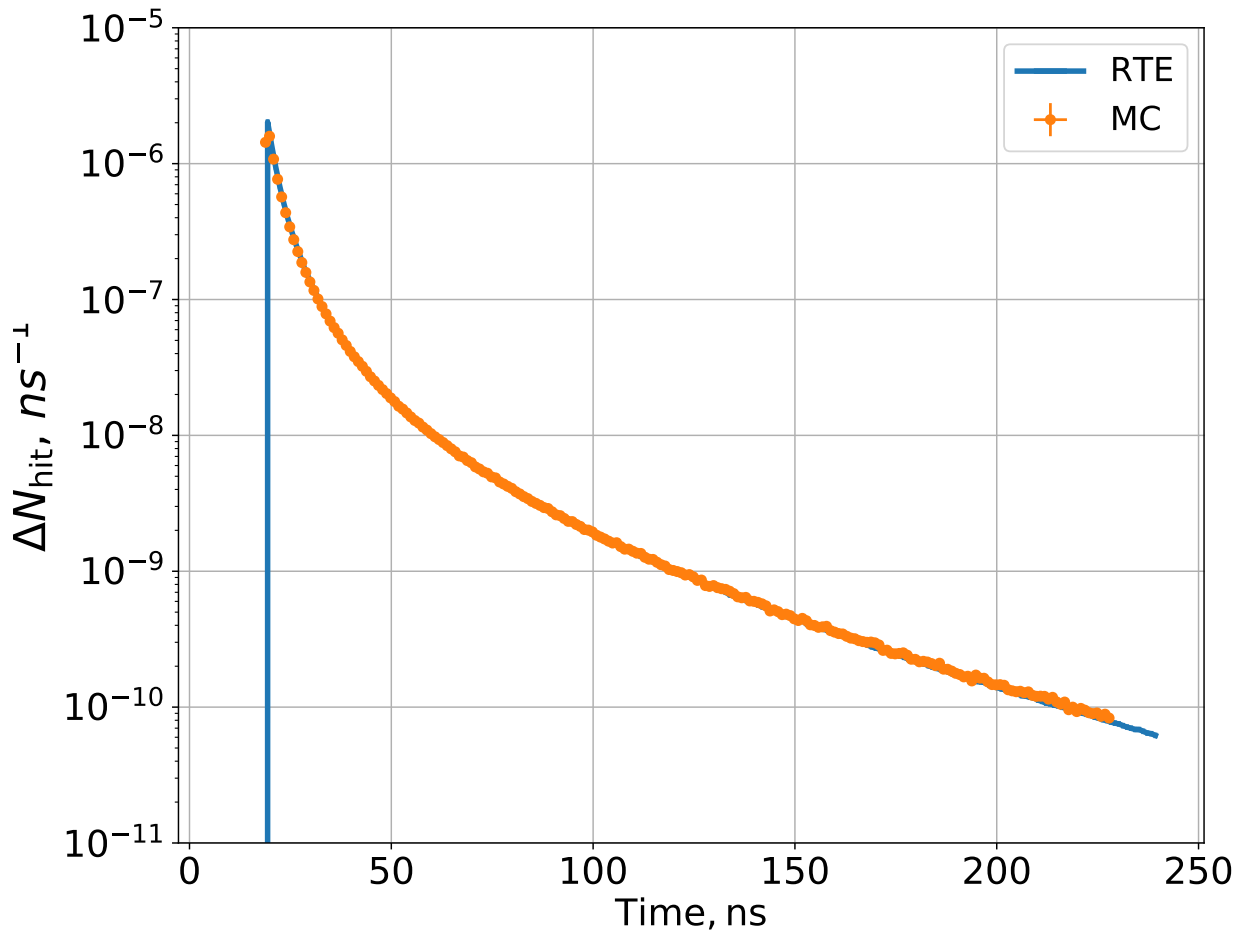


Рисунок 3.6 — Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (MC) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0,3)$ м.

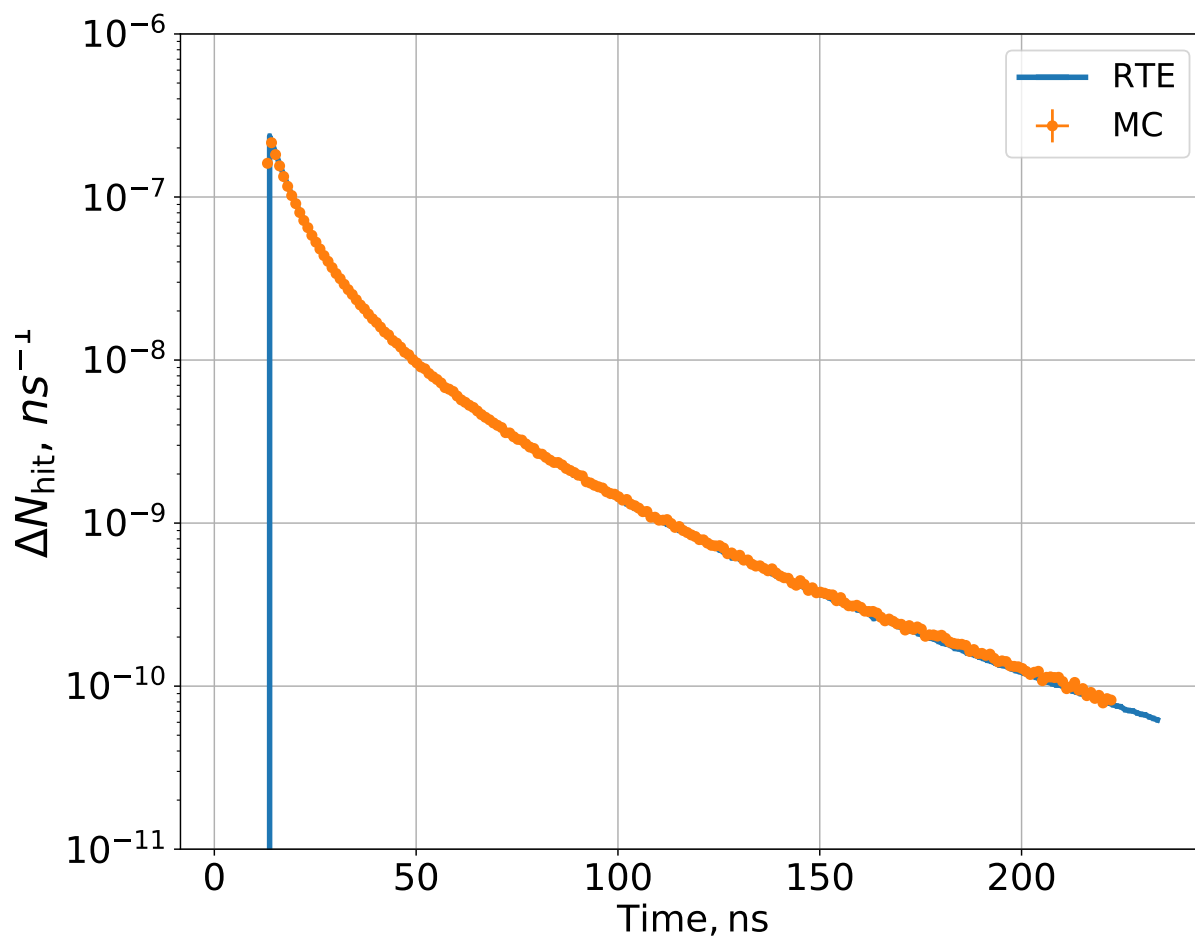


Рисунок 3.7 — Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (MC) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0,0)$ м.

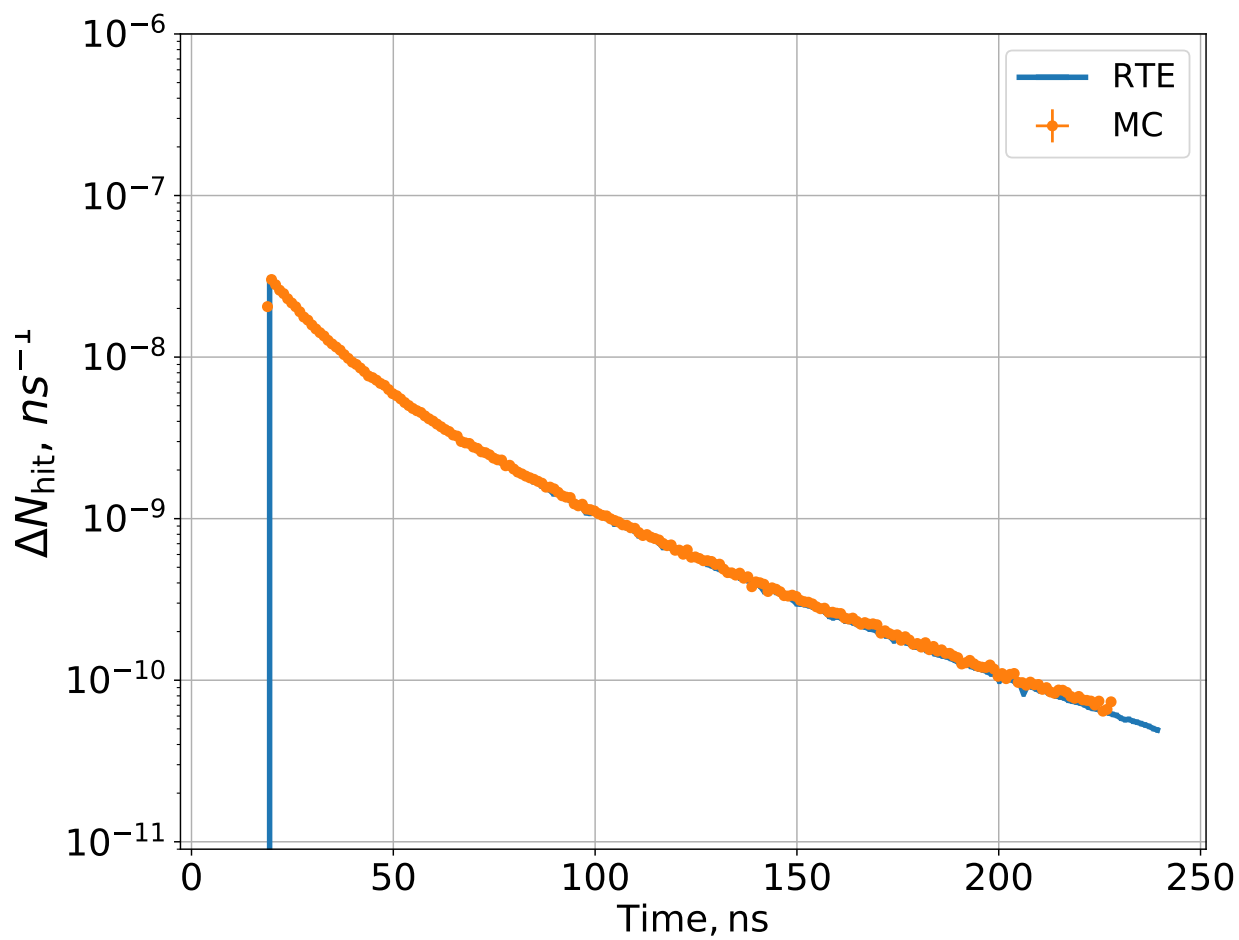


Рисунок 3.8 — Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (MC) в точке $\mathbf{r}_0 = (3, 0, -3)$ м.

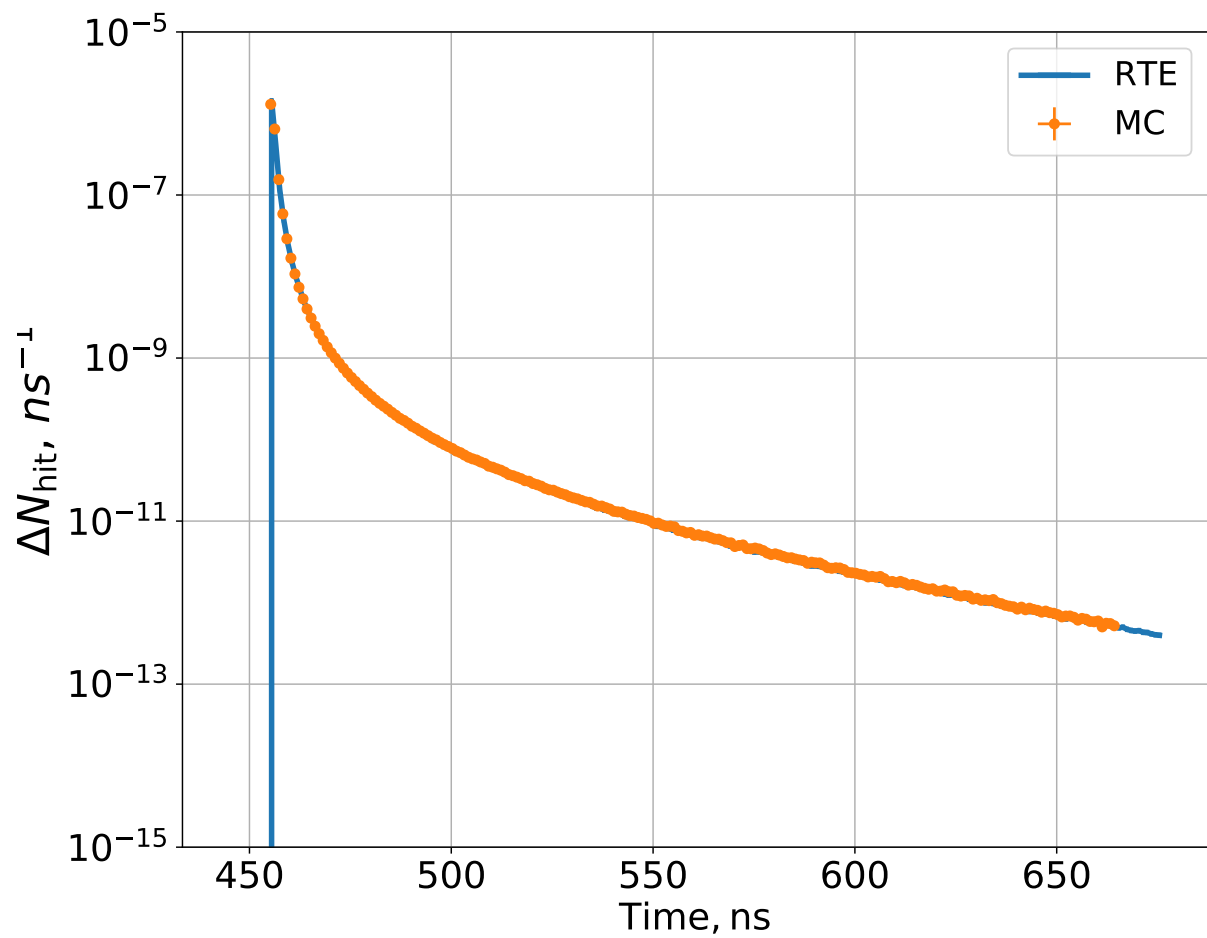


Рисунок 3.9 — Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (MC) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0,100)$ м.

Точка \mathbf{r} , в метрах	RTE				МС
	2nd	3rd	4th	Total	
(3, 0, 3)	$8 \cdot 10^{-3}$	0.48	0.48	1.0	66
(3, 0, 0)	$2.6 \cdot 10^{-2}$	1.4	1.4	3.0	1012
(3, 0, -3)	$9.8 \cdot 10^{-2}$	5.6	5.6	12.1	8975
(3, 0, 100)	$5 \cdot 10^{-2}$	5.7	5.7	13.9	15

Таблица 2 — Время CPU, необходимое для расчетов RTE и МС (методом трассировки лучей), нормированное на общее время CPU для всех четырех порядков RTE в начальной контрольной точке. Первый порядок (аналитический) исключен из-за незначительных требований к процессору. Последующие порядки RTE и расчеты МС представлены с точностью до 1% (относительная неопределенность). Одна единица времени в данном контексте соответствует 120 секундам времени работы в системе с 4 ядрами с частотой 2223 МГц и 12 ГБ оперативной памяти.

3.4.1 Аппроксимация низших порядков

Мы можем оценить аналитические выражения для низших порядков. Для нулевого порядка имеем строго аналитическое выражение (дельта-функций достаточно, чтобы снять все интегралы). Выражение для нулевого порядка можно увидеть в (3.54). Для первого и второго порядка мы имеем следующую формулу.

$$\Delta N_{hit}^{(1+2)} = \frac{2\mu_s}{\mu_t} g(x_0) \frac{(e^{-\mu_t ct_i} - e^{-\mu_t ct_{i+1}})}{dy2} (1 + \mu_s ct_i) \Theta(t_i - r/c) \quad (3.58)$$

где $d = t_{i+1} - t_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_i$ и $x_0 = 1 - \frac{(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{s}}_0)^2}{y^2}$.

Вывод этого выражения и другие аппроксимации, дающие хорошее приближение, можно найти в Приложении А.

3.5 Эффект уширения спектра

Часто в симулировании Монте-Карло для увеличения статистики зарегистрированных фотонов увеличивается размер оптического модуля, а после происходит перевзвешивание их числа согласно закону обратных квадратов. В данной работе было обнаружено, что такая процедура приводит к искажению спектра фотонов, что, впоследствии, может привести к неправильной оценке сигнала. На рис. (3.10) можно видеть как изменяется форма спектра относительно истинной (при радиусе оптического модуля $R_{OM} = 0.21\text{м}$) при увеличении размера оптического модуля.

3.6 Черенковское излучение

Получим потоки света, наблюдаемые при черенковском излучении частицей, движущейся с некоторой скоростью \mathbf{v} . Найдем $L^{(0)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ и $L^{(1)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$. Источник в данном случае будет иметь следующий вид:

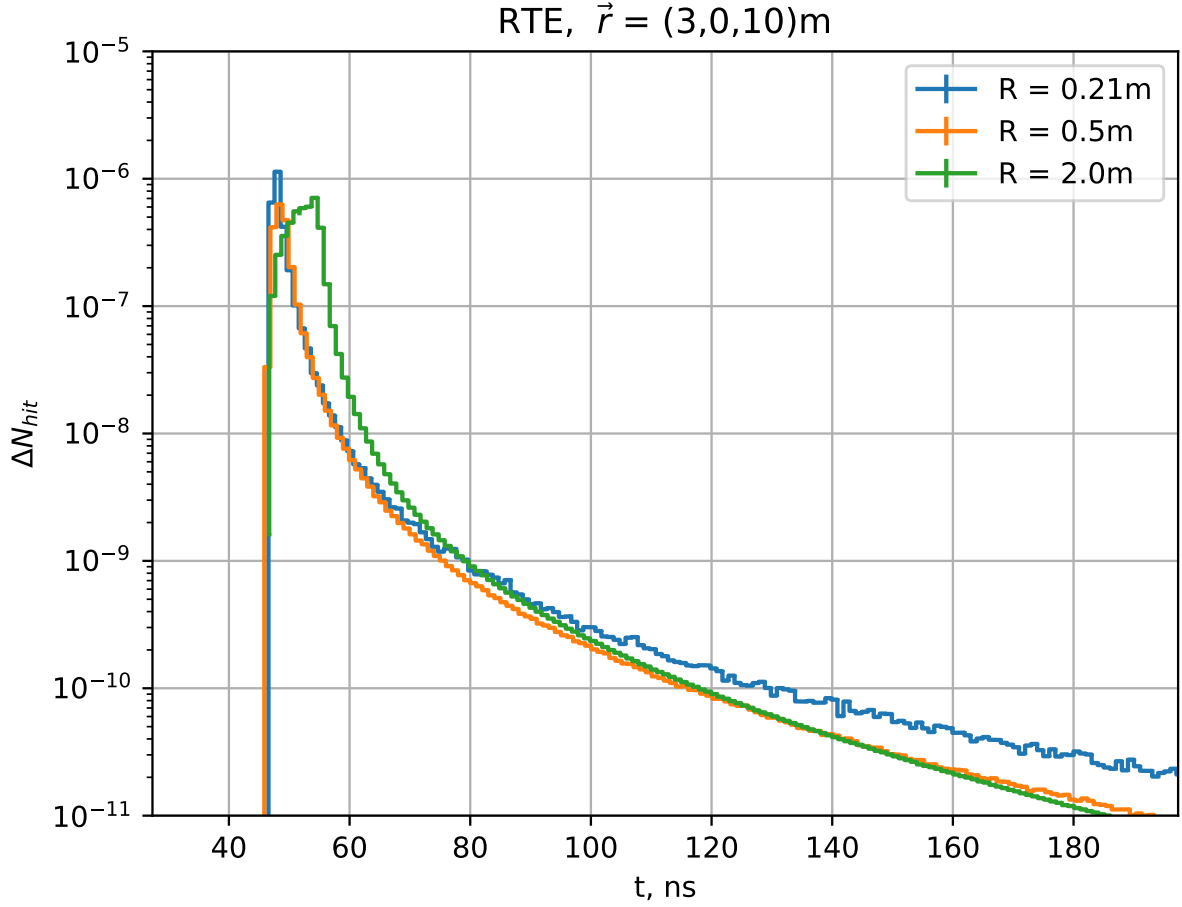


Рисунок 3.10 — Изменение формы спектра пришедших на детектор фотонов в зависимости от радиуса детектора с учетом перевзвешивания потока фотонов

$$S = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v} \cdot t) \cdot \delta((\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) - \cos \theta_c), \quad (3.59)$$

где $\mathbf{v} = (0,0,v)$, $\hat{\mathbf{s}} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ и $\hat{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{v}/v = (0,0,1)$.

В силу формулы (3.17) мы можем написать:

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c \int_0^t dt' e^{-\mu_a c(t-t')} \cdot S(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t-t'), t', \hat{\mathbf{s}}) \quad (3.60)$$

. Подставляя сюда (3.59), получаем:

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c \int_0^t dt' e^{-\mu_a c(t-t')} \cdot \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - c\hat{\mathbf{s}}(t-t')) \cdot \delta((\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) - \cos \theta_c). \quad (3.61)$$

Снимем интеграл по трехмерной дельта функции, по переменной z . Распишем аргумент дельта функции:

$$\begin{aligned} f &= z - c \cdot \cos \theta(t-t') - vt' = 0, \\ t' &= (z - ct \cos \theta)/(v - c \cos \theta), \end{aligned}$$

$$t - t' = (vt - z)/(v - c \cos \theta),$$

$$\left| \frac{df}{dt'} \right| = v - c \cos \theta.$$

Нуль дельта функции должен лежать в пределах интегрирования. Чтобы учесть их, введем скобки Айверсона:

$$[A] = \begin{cases} 1, & A - \text{истинно} \\ 0, & A - \text{ложно} \end{cases}.$$

Итак, нуль дельта функции лежит внутри, если $[0 \leq t' \leq t]$. Подставляя сюда выражение для t' , имеем:

$$[0 \leq (z - ct \cos \theta)/(v - c \cos \theta) \leq t].$$

Итак, для нулевого порядка, получаем следующее выражение:

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c \frac{e^{\mu_a c \frac{z-vt}{v-c \cos \theta}}}{v - c \cos \theta} \cdot \delta((\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) - \cos \theta_c) \cdot \delta^2(\mathbf{r}_\perp + c \hat{\mathbf{s}}_\perp \cdot \frac{z - vt}{v - c \cos \theta}) \times \quad (3.62)$$

$$\times [0 \leq (z - ct \cos \theta)/(v - c \cos \theta) \leq t]$$

или же

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c \frac{e^{\mu_a c \frac{z-vt}{v-c \cos \theta}}}{v - c \cos \theta} \cdot \delta((\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) - \cos \theta_c) \cdot \delta^2(\mathbf{r}_\perp + c \hat{\mathbf{s}}_\perp \cdot \frac{z - vt}{v - c \cos \theta}) \times \quad (3.63)$$

$$\times [z/v \leq t \leq z/(\cos \theta)].$$

Отметим, что оставшиеся дельта функции описывают поверхность, по которой распространяются излученные фотоны. Покажем, что эта поверхность — черенковский конус.

$$\begin{cases} x = c \sin \theta \cos \varphi (vt - z)/(v - c \cos \theta) \\ y = c \sin \theta \sin \varphi (vt - z)/(v - c \cos \theta) \end{cases}. \quad (3.64)$$

Из этой системы получаем:

$$(v - c \cos \theta)^2 (x^2 + y^2) = c^2 \sin^2 \theta (z - vt)^2. \quad (3.65)$$

В Приложении А можно найти вывод для потока фотонов, полученных в первом порядке.

3.7 Свойства функции Хеньи-Гринштейна и решение интегральных уравнений с ядром в виде функции Хеньи-Гринштейна

Перечислим свойства функции Хеньи-Гринштейна, которые были получены в данной работе.

3.7.1 Моменты функции Хеньи-Гринштейна

Напомним, что функция Хеньи-Гринштейна определяется следующим выражением:

$$f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = \frac{1 - g^2}{4\pi} (1 + g^2 - 2g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1))^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.66)$$

Для изучения характеристик решения, полученных с помощью RTE, нам будут полезны моменты функции Хеньи-Гринштейна следующего вида:

$$m_{ijk\dots} = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{s}_{1i} \hat{s}_{1j} \hat{s}_{1k} \dots = \langle \hat{s}_{1i} \hat{s}_{1j} \hat{s}_{1k} \dots \rangle_{HG}. \quad (3.67)$$

Начнем с нулевого момента. В силу условия нормировки получаем для него следующее выражение:

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = 1. \quad (3.68)$$

Моменты первого порядка есть:

$$m_i = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{s}_{1i}. \quad (3.69)$$

Здесь индекс i означает координату вектора $\hat{\mathbf{s}}$. В выражении выше есть только один выделенный вектор - вектор $\hat{\mathbf{s}}$. Значит, данный интеграл можно записать в виде:

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{s}_{1i} = A \hat{\mathbf{s}}_i. \quad (3.70)$$

Умножая уравнение (3.70) на $\hat{\mathbf{s}}_i$ и суммируя все по индексу, получаем выражение для константы A :

$$A = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1)(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = 2\pi \int_{-1}^1 dx x f_g(x) = g. \quad (3.71)$$

В итоге получаем:

$$m_i = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_{1i} = g \hat{\mathbf{s}}_i. \quad (3.72)$$

Перейдем ко второму моменту.

$$m_{ij} = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_{1i} \hat{\mathbf{s}}_{1j}. \quad (3.73)$$

Он может быть выражен только через символ Кронекера (δ_{ij}) либо через $\hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j$. Значит, следует искать этот момент в виде:

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_{1i} \hat{\mathbf{s}}_{1j} = A \delta_{ij} + B \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j. \quad (3.74)$$

Положив $i = j$ и просуммировав по i , получим уравнение:

$$3A + B = 1. \quad (3.75)$$

Умножая на $\hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j$ и суммируя, получаем:

$$A + B = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1)(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1)^2 = 2\pi \int_{-1}^1 dx x^2 f_g(x). \quad (3.76)$$

Разрешая эти уравнения, получаем:

$$\begin{cases} A = (1 - g^2)/3 \\ B = g^2 \end{cases}. \quad (3.77)$$

Таким образом, получаем:

$$m_{ij} = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_{1i} \hat{\mathbf{s}}_{1j} = \frac{1 - g^2}{3} \delta_{ij} + g^2 \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j. \quad (3.78)$$

Поступая аналогично, мы можем найти выражения для моментов 3 и 4 порядков:

$$\begin{aligned} m_{ijk} &= \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_{1i} \hat{\mathbf{s}}_{1j} \hat{\mathbf{s}}_{1k} \\ &= \frac{2g(1-g^2)}{5} (\delta_{ij} \hat{\mathbf{s}}_k + \delta_{ik} \hat{\mathbf{s}}_j + \delta_{jk} \hat{\mathbf{s}}_i) + \frac{g(8g^2-3)}{5} \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \hat{\mathbf{s}}_k. \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} m_{ijkl} &= \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_{1i} \hat{\mathbf{s}}_{1j} \hat{\mathbf{s}}_{1k} \hat{\mathbf{s}}_{1l} = \frac{(1-g^2)(7-3g^2)}{105} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &+ \frac{g^2(1-g^2)}{3} (\delta_{ij} \hat{\mathbf{s}}_k \hat{\mathbf{s}}_l + \delta_{ik} \hat{\mathbf{s}}_j \hat{\mathbf{s}}_l + \delta_{il} \hat{\mathbf{s}}_j \hat{\mathbf{s}}_k + \delta_{jk} \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_l + \delta_{jl} \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_k + \delta_{kl} \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j) \\ &+ g^4 \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \hat{\mathbf{s}}_k \hat{\mathbf{s}}_l. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Выпишем частные случаи, соответствующие изотропному рассеянию ($g = 0$) и чистому рассеянию вперед ($g = 1$). Для чистого рассеяния вперед получаются следующие формулы:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i^{(g=\pm 1)} = \pm \hat{\mathbf{s}}_i, \\ m_{ij}^{(g=\pm 1)} = \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j, \\ m_{ijk}^{(g=\pm 1)} = \pm \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \hat{\mathbf{s}}_k, \\ m_{ijkl}^{(g=\pm 1)} = \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \hat{\mathbf{s}}_k \hat{\mathbf{s}}_l. \end{array} \right. \quad (3.81)$$

Для случая изотропного рассеяния получаем следующие формулы:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i^{(g=0)} = 0, \\ m_{ij}^{(g=0)} = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \\ m_{ijk}^{(g=0)} = 0, \\ m_{ijkl}^{(g=0)} = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{array} \right. \quad (3.82)$$

3.7.2 Преобразования функции Хеньи-Гринштейна

Докажем полезные соотношения на функции Хеньи-Гринштейна:

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{g_1}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) f_{g_2}(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2) \hat{\mathbf{s}}_1 = f_{g_1 g_2}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2). \quad (3.83)$$

Для этого представим функцию Хеньи-Гринштейна в виде ряда:

$$f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} g^l P_l(\cos \Theta), \quad (3.84)$$

где $\cos \Theta = (\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1)$ и $P_l(x)$ - полиномы Лежандра. Используя теорему сложения для полиномов Лежандра, можно написать:

$$f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} g^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_1). \quad (3.85)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{g_1}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) f_{g_2}(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2) \hat{\mathbf{s}}_1 = \\ & \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \sum_{l,m} \sum_{n,k} g_1^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_1) g_2^n Y_{nk}(\hat{\mathbf{s}}_1) Y_{nk}^*(\hat{\mathbf{s}}_2) = \\ & \sum_{l,m} \sum_{n,k} g_1^l g_2^n Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{nk}^*(\hat{\mathbf{s}}_2) \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_1) Y_{nk}(\hat{\mathbf{s}}_1) = \\ & \sum_{l,m} \sum_{n,k} g_1^l g_2^n Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{nk}^*(\hat{\mathbf{s}}_2) \delta_{ln} \delta_{mk} = \sum_{l,m} (g_1 g_2)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_2) = f_{g_1 g_2}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Последняя строка доказывает исходное утверждение.

3.7.3 Обобщенные функции Хеньи-Гринштейна

Определение обобщенных функций Хеньи-Гринштейна (ОФХГ)

Ранее было получено, что функция Хеньи-Гринштейна может быть представлена в следующем виде:

$$f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = \sum_{l,m} g^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_1). \quad (3.87)$$

Такое представление функции позволяет нам продлить ее вне интервала $(-1, 1)$ по параметру g . В точках $g = \pm 1$ функция Хеньи-Гринштейна становится обобщенной функцией. В самом деле, определим обобщенную функцию следующим

образом:

$$f_{1/g}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = \sum_{l,m} g^{-l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_1). \quad (3.88)$$

Такая функция является обобщенной, существует только в смысле функционала, так как соответствующий ряд может не сходиться, однако интегралы от нее с другими функциями хорошо определены при некоторых условиях на класс пробных функций. В самом деле, если рассмотреть какой-то интеграл от этой функции, то он может быть хорошо определен. Например,

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{1/g}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{s}}_1 = \frac{1}{g} \quad (3.89)$$

или же

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{1/g}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) = 1. \quad (3.90)$$

В целом, можно написать правило, по которому функции (как обобщенные) действуют на функции на сфере и переводят их в функции на сфере. Итак, пусть $h(\hat{\mathbf{s}})$ есть функция на сфере. Тогда можно написать следующее разложение:

$$h(\hat{\mathbf{s}}) = \sum_{l,m} h_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}). \quad (3.91)$$

Обобщенная функция Хенни-Гринштейна действует на нее по следующему правилу:

$$f_{1/g} * h := \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{1/g}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) h(\hat{\mathbf{s}}_1) = \sum_{l,m} g^{-l} h_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}). \quad (3.92)$$

Отсюда, в частности, можно увидеть, что если $h_{lm} = g^l$, то получаем уже известное соотношение:

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{1/g}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) f_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2) = \sum_{l,m} Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{s}}_2) = \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_2). \quad (3.93)$$

Примеры использования

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода вида на неизвестную функцию $h(\hat{\mathbf{s}})$ и с ядром в виде функции ХГ:

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) h(\hat{\mathbf{s}}_1) = k(\hat{\mathbf{s}}). \quad (3.94)$$

С помощью обобщенных функций Хеньи-Гринштейна можно сразу написать решение этого уравнения:

$$h(\hat{\mathbf{s}}) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 f_{1/g}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) k(\hat{\mathbf{s}}). \quad (3.95)$$

3.8 Задача распространения света: средние значения

Обсудим средние значения и моменты, которые получаются в задаче распространения света. При выводе мы будем основываться на формулах, которые получили итерационным решением интегро-дифференциального уравнения.

Пусть $L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ -решение уравнения переноса (3.1). Определим среднее как:

$$\langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}. \quad (3.96)$$

Также можно определить среднее, получаемое при условии, что произошло ровно n актов рассеяния:

$$\langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle^{(n)} = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}. \quad (3.97)$$

Для расчета средних будем использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-c\mu t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) c \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c(\mu_s c t)^n e^{-c\mu t}. \quad (3.99)$$

Отсюда находим нормировку

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c e^{-c\mu t}. \quad (3.100)$$

Данная нормировка описывает вероятность не поглотиться фотону в среде за время t . Учитывая эту нормировку, можно записать общее выражение для среднего при условии, что произошло n актов рассеяния:

$$\begin{aligned} \langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \int d\mathbf{r} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Полное среднее определим как:

$$\langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle^{(n)}. \quad (3.102)$$

Начнем расчет средних со средней координаты. Введем для удобства следующие обозначения:

$$x = \mu_s c t, \quad (3.103)$$

$$\mu'_s = \mu_s (1 - g), \quad (3.104)$$

$$\mu''_s = \mu_s (1 - g^2). \quad (3.105)$$

Здесь μ'_s и μ''_s имеют смысл эффективных обратных длин рассеяния. Можно показать (выводы этой и следующих формул приведены в Приложении А), что средняя координата дается следующей формулой:

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{\mu'_s} (1 - \exp(-\mu'_s ct)) \hat{\mathbf{s}}_0. \quad (3.106)$$

Из последней формулы можно заметить, что:

1. Средняя координата никогда не превышает одну эффективную длину рассеяния. Отсюда можно заключить, что на длинах, больших одной эффективной длины рассеяния, вероятность затеряться фотону в среде (не выйти из нее) стремится к 1.
2. Средняя координата больше для g более близких к 1. Если фотон рассеивается практически вперед, то вероятность того, что он пройдет большее расстояние в этом направлении будет также больше.
3. Видно, что при малых временах средняя координата пропорциональна ct , а именно $ct \hat{\mathbf{s}}_0$, что логично ожидать, когда мы работаем в приближении переноса. При больших временах в силу вступает диффузионное приближение и средняя координата стремится к $\frac{1}{\mu'_s} \hat{\mathbf{s}}_0$.

Аналогично можно получить среднее значение направления и скорости:

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \exp(-\mu'_s ct) \hat{\mathbf{s}}_0, \quad (3.107)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = c \exp(-\mu'_s ct) \hat{\mathbf{s}}_0. \quad (3.108)$$

Легко увидеть, что выполняется следующее соотношение:

$$\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (3.109)$$

Здесь так же как и для средней координаты можно увидеть следующую картину: в приближении переноса скорость фотона совпадает со скоростью света в среде. Однако при больших временах средняя скорость фотона стремится к 0. Это означает, что фотон переходит в диффузионный режим и все направления становятся равнозначными, вся информация о начальном направлении теряется.

Теперь посмотрим на корреляционную функцию для углов. Корреляции, при условии n рассеяний имеют вид:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i^k \hat{\mathbf{s}}_{i+m}^l \rangle^{(n)} = e^{-x} \frac{x^n g^m}{n!} \left(\frac{1 - g^{2i}}{3} \delta_{kl} + g^{2i} \hat{\mathbf{s}}_{0k} \hat{\mathbf{s}}_{0l} \right) \quad (3.110)$$

Полная корреляционная функция, просуммированная по всем порядкам, имеет следующий вид:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} (1 - \exp(-\mu'_s ct)) + \exp(-\mu''_s ct) \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}. \quad (3.111)$$

Здесь в начальный момент времени (в режиме переноса) корреляции направлены в соответствии с начальным направлением ($\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle = \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}$). Однако при увеличении времени распространения фотона можно видеть, что система переходит в диффузионный режим ($\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$). Интересно заметить, что масштаб времени, когда происходит такой переход, теперь задается не параметром $\mu'_s = \mu_s(1 - g)$, а параметром $\mu''_s = \mu_s(1 - g^2)$. Таким образом в системе возникает два характерных времени: $t' = 1/(\mu_s c(1 - g))$ и $t = 1/(\mu_s c(1 - g^2))$.

Теперь попробуем определить дисперсию для направления. Для случая одной переменной (скаляра) дисперсия определяется как:

$$D(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (3.112)$$

В случае многих переменных есть переменная \mathbf{x} , среднее $\langle \mathbf{x} \rangle$ и ковариационная матрица $C_{ij} = \langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \rangle$. Отцентрируем ее, чтобы она несла информацию об отклонении переменной:

$$G_{ij} = \langle (\mathbf{x}_i - \langle \mathbf{x}_i \rangle)(\mathbf{x}_j - \langle \mathbf{x}_j \rangle) \rangle = \langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \rangle - \langle \mathbf{x}_i \rangle \langle \mathbf{x}_j \rangle. \quad (3.113)$$

В общем случае эта матрица имеет размер $n \times n$ и является симметричной матрицей над полем \mathbb{R} . Значит, ее всегда можно диагонализировать. Это будет соответствовать замене переменных $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{y}_i$, где теперь все \mathbf{y}_i будут независимы. Их совместная матрица отклонений будет иметь следующий вид:

$$\hat{G}_y = \text{diag}(D(y_1), D(y_2), D(y_3), \dots, D(y_n)). \quad (3.114)$$

Тогда величина, которая будет характеризовать полную дисперсию системы, есть:

$$D(\{\mathbf{y}\}) = \sum_{k=0}^n D(y_i) = \text{Tr}(\hat{G}_y) = \text{Tr}(G). \quad (3.115)$$

В последнем равенстве учтено, что след матрицы является инвариантом при преобразованиях базиса. Таким образом, можно определить полную дисперсию для векторов направления как:

$$D(s) := D(\{s\}) = \text{Tr}(\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle - \langle \hat{\mathbf{s}}_i \rangle \langle \hat{\mathbf{s}}_j \rangle) = 1 - e^{-2\mu'_s ct}. \quad (3.116)$$

Здесь можно видеть, что дисперсия для значения $g = -0.9$ растет быстрее остальных значений и доходит до 1. Это значит, что фотон может иметь абсолютно произвольное направление. Для случая $g = 0.9$ этот момент наступает позже, так как в этом случае фотон запутывается в среде в меньшей степени.

Теперь рассмотрим координатные корреляции:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle = & - \frac{2}{3(\mu'_s)^2(1+g)g} (g(g+2 + \mu_s ct(g^2 - 1)) - (1+g)^2 e^{-\mu'_s ct} + e^{-\mu''_s ct}) \delta_{ij} \\ & + \frac{2}{(\mu'_s)^2(1+g)g} (g - (1+g)e^{-\mu'_s ct} + e^{-\mu''_s ct}) \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Посмотрим на частные случаи этой формулы, а именно режим переноса и

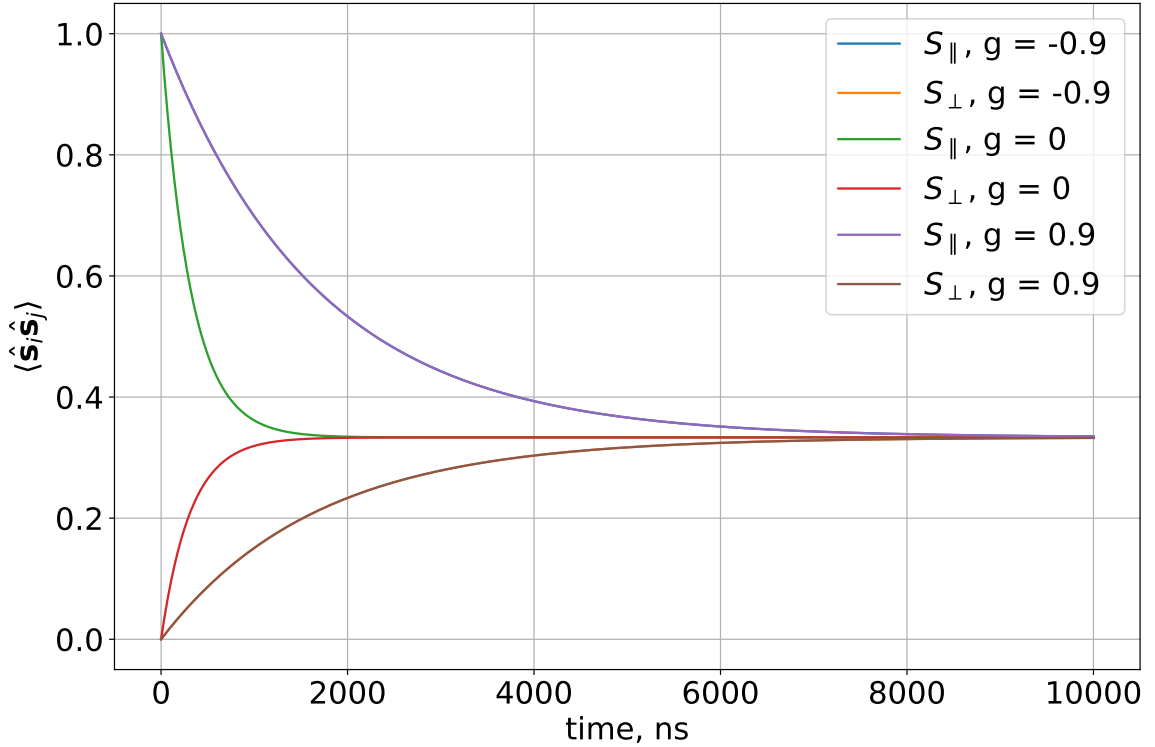


Рисунок 3.11 — Зависимость корреляционной функции направлений фотонов в продольном и поперечном направлениях от времени

режим диффузии.

1. В режиме переноса пространственные корреляции вне зависимости от параметра асимметрии g имеют одинаковый вид:

$$\langle \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \rangle = (ct)^2 \hat{\mathbf{s}}_0^i \hat{\mathbf{s}}_0^j. \quad (3.118)$$

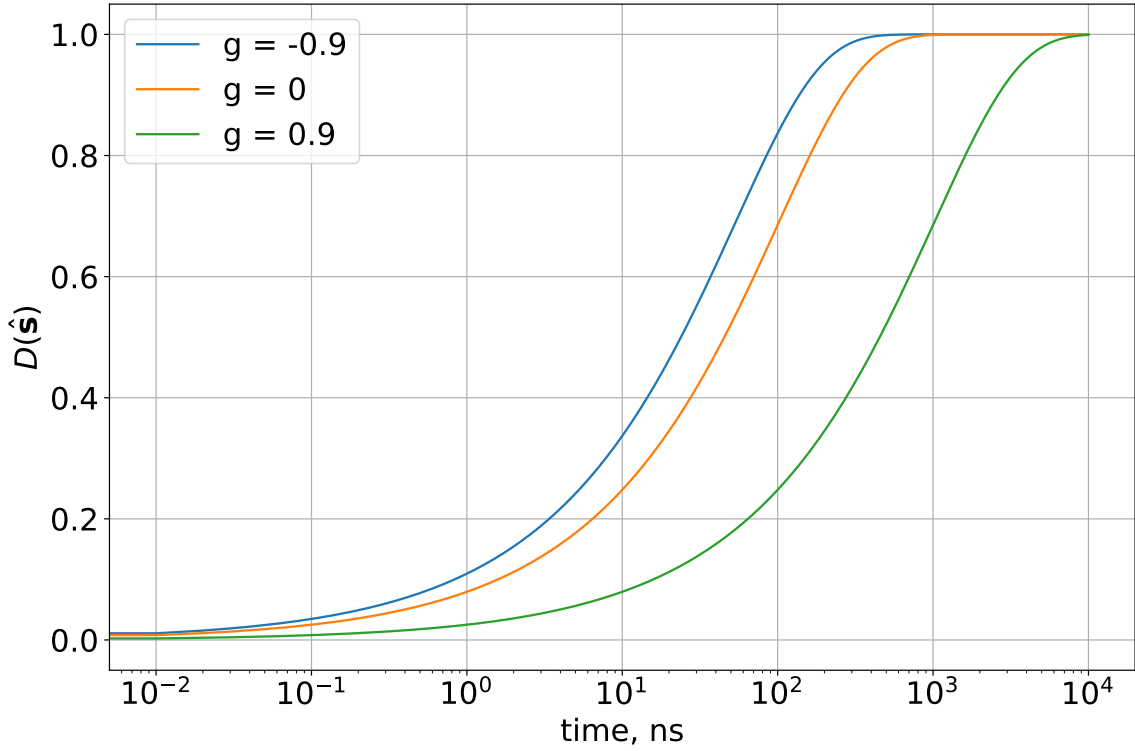


Рисунок 3.12 — Зависимость дисперсии направления фотонов от времени

2. В режиме диффузии корреляции будут отличаться при разных g :

$$\begin{aligned}
 g \neq \pm 1 : \quad \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle &= \frac{2ct}{3\mu'_s} \delta_{ij} + \frac{2}{(\mu'_s)^2 (1+g)} (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j, \\
 g = -1 : \quad \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle &= \frac{ct}{\mu_s} \hat{\mathbf{s}}_0^i \hat{\mathbf{s}}_0^j.
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Также можно определить дисперсию координаты, задаваемую следующей формулой:

$$D(r) = Tr(\langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle - \langle \mathbf{r}_i \rangle \langle \mathbf{r}_j \rangle). \tag{3.120}$$

Аналогично можно определить флуктуацию координаты:

$$\delta(r) = \sqrt{D(r)} / \langle r \rangle. \tag{3.121}$$

Можно видеть, что для случая $g = 0.9$ флуктуация растет медленнее остальных случаев, что логично, так как из-за того, что фотон преимущественно распространяется вперед, то область, где может находиться фотон, будет меньше по сравнению со случаем $g = 0$ и $g = -0.9$.

Остальные средние с подробным выводом можно найти в Приложении А.

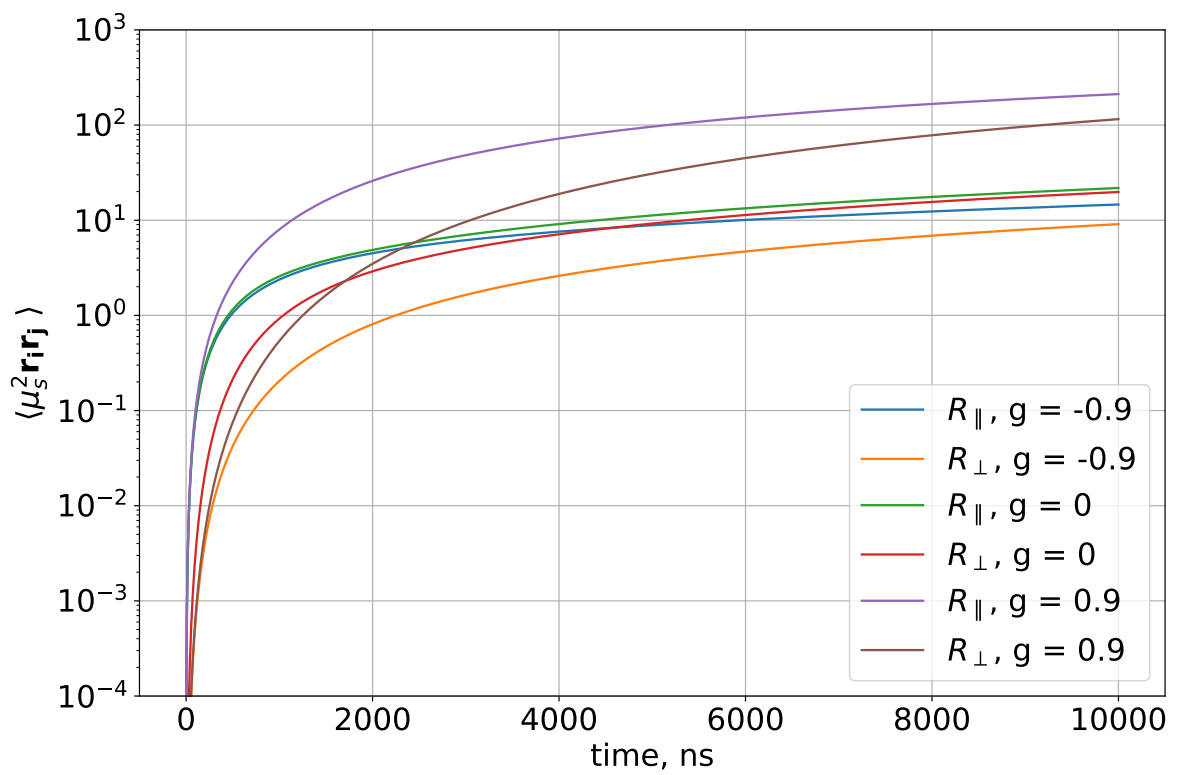


Рисунок 3.13 — Зависимость корреляционной функции для радиус-вектора фотонов в продольном и поперечном направлениях от времени

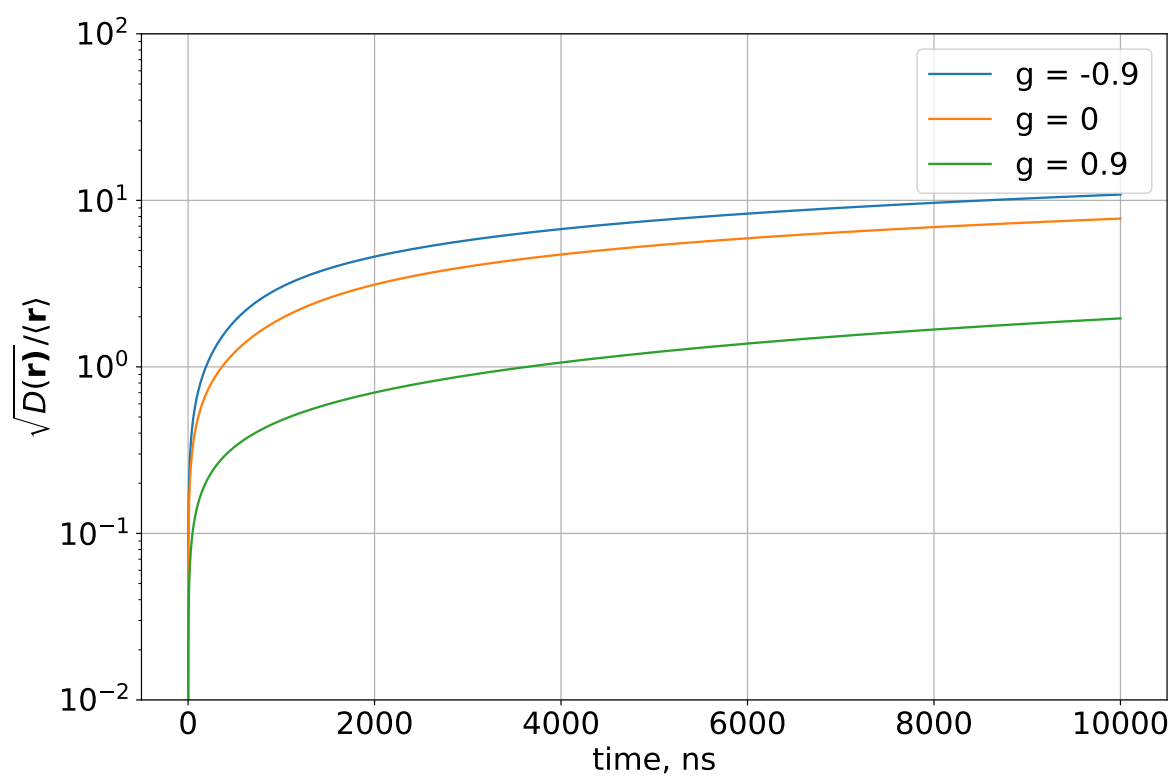


Рисунок 3.14 — Зависимость дисперсии радиус-вектора фотонов от времени

3.9 Резюме

В данной главе была поставлена трехмерная задача переноса излучения

$$\hat{K}L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) + \mu_s \hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}'), \quad (3.122)$$

где

$$\hat{K} \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla + \mu_t \right) \quad (3.123)$$

дифференциальный оператор с частными производными, $\hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'}$ -интеграл столкновения, определенный как

$$\hat{V}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}'} f(\hat{\mathbf{s}}') \equiv \int_{4\pi} d\hat{\mathbf{s}}' g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') f(\hat{\mathbf{s}}'), \quad (3.124)$$

$S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ -функция источника, которая известна заранее, c — скорость света в среде, $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ полный коэффициент затухания, являющийся суммой обратной длины поглощения (коэффициент поглощения) μ_a и обратной длины рассеяния (коэффициента рассеяния) μ_s . Функция $g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ это плотность вероятности того, что направление фотона $\hat{\mathbf{s}}$ после рассеяния сменится на $\hat{\mathbf{s}}'$.

В качестве функции рассеяния используется функция Хензи-Гринштейна:

$$g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'))^{3/2}}. \quad (3.125)$$

В данной главе поставленная задача была решена итерационным способом и получено решение в виде асимптотического ряда:

$$L = L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta L^{(n)}, \quad (3.126)$$

где

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L_0 = ce^{-c\mu_t t} \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= ce^{-c\mu_t t} \frac{\delta(r - ct)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \end{aligned} \quad (3.127)$$

и

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= (\mu_s ct)^n e^{-c\mu_t t} \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) \right) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) c \delta^3(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)}). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Также были найдены точные решения в частных случаях. Было проведено сравнение данного метода с методом моделирования Монте-Карло, получено полное совпадение результатов, рассчитанных двумя методами (методом Монте-Карло и методом решения уравнения переноса).

Были получены аппроксимации, дающие хорошие приближения для интегральных потоков для произвольного порядка.

Дополнительно был обнаружен эффект уширения спектра, возникающий при процедуре перевзвешивания потоков.

Была также предложена альтернативная схема численного расчета потоков, основанная на комбинации выделения сингулярного вклада потока и применения Z-факторного метода решения кинетических уравнений.

Помимо исследования функции Грина данной задачи, в качестве источника была рассмотрена частица, дающая черенковское излучение. Получены формулы для нулевого порядка:

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c \frac{e^{\mu_a c \frac{z-vt}{v-c \cos \theta}}}{v-c \cos \theta} \cdot \delta((\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) - \cos \theta_c) \cdot \delta^2(\mathbf{r}_\perp + c \hat{\mathbf{s}}_\perp \cdot \frac{z-vt}{v-c \cos \theta}) \times \quad (3.129)$$

$$\times [z/v \leq t \leq z/(\cos \theta)].$$

Также было показано явное образование черенковского конуса и получен первый порядок для данного источника.

В конце данной главы была исследована функция Хеньи-Гринштейна, получен ряд формул как для моментов данной функции, характеристической функции, так и для производящей функции.

Были введены обобщённые функции Хеньи-Гринштейна, показано их применение для решения уравнения Фредгольма со специальным ядром в виде функции Хеньи-Гринштейна.

Также были получены точные формулы для различных моментов в задаче переноса света, таких как:

– Средняя координата:

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{\mu'_s} (1 - \exp(-\mu'_s ct)) \hat{\mathbf{s}}_0. \quad (3.130)$$

– Среднее направление:

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \exp(-\mu'_s ct) \hat{\mathbf{s}}_0, \quad (3.131)$$

– Корреляции направлений:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} (1 - \exp(-\mu''_s ct)) + \exp(-\mu''_s ct) \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}. \quad (3.132)$$

– Корреляции радиус-вектора:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle &= - \frac{2}{3(\mu'_s)^2(1+g)g} (g(g+2 + \mu_s ct(g^2 - 1))) \\
 &+ \frac{2}{3(\mu'_s)^2 g} ((1+g)e^{-\mu'_s ct} + e^{-\mu''_s ct}) \delta_{ij} \\
 &+ \frac{2}{(\mu'_s)^2(1+g)g} (g - (1+g)e^{-\mu'_s ct} + e^{-\mu''_s ct}) \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}.
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

Глава 4. Нейтринный генератор NuPropagator

4.1 Метод Z-фактора

Метод Z-фактора помогает нам рассчитать, как изменяются потоки нейтрино при распространении в толщу материи. Дадим здесь его краткое описание. Полное описание можно найти в работе [27].

Итак, рассмотрим нейтринный поток $F_\nu(x, E)$. Так как за счет заряженного тока нейтрино выбывают из потока, а за счет нейтрального тока они могут изменить энергию и направление, мы можем написать на функцию $F_\nu(x, E)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial F_\nu(x, E)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_\nu(E)} \left[\int_0^1 \frac{dy}{1-y} \Phi_\nu(y, E) F_\nu(x, E_y) - F_\nu(x, E) \right] \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} x &= \int_0^L \rho(L') dL', \\ \lambda_\nu^{-1}(E) &= \sum_T N_T \sigma_{\nu T}^{tot}(E), \\ \Phi_\nu(y, E) &= \frac{1}{\lambda_\nu(E)} \sum_T N_T \frac{d\sigma_{\nu T \rightarrow \nu X}}{dy}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\rho(L)$ — плотность вещества, которая замедляется траекторией нейтрино, N_T - число рассеивателей, $E_y = \frac{E}{1-y}$. Добавим к ур.(4.1) начальное условие, что

$$F_\nu(x=0, E) = F_\nu^0(E). \quad (4.3)$$

Ищем решение уравнения в следующем виде

$$F_\nu(x, E) = F_\nu^0(E) \exp\left(-\frac{x}{\Lambda_\nu(x, E)}\right) \quad (4.4)$$

Мы знаем основную асимптотику нашего решения, она имеет вид $\exp\left(-\frac{x}{\Lambda_\nu(x, E)}\right)$ (это решение при пренебрежении эффектом изменения энергии нейтрино). Значит, нам надо искать наш фактор в следующем виде:

$$\Lambda_\nu(x, E) = \frac{\lambda_\nu(E)}{1 - Z_\nu(x, E)} \quad (4.5)$$

Подставляя этот анзацц в уравнение (4.1), получаем уравнение:

$$Z_\nu(x, E) = \int_0^x dx' \int_0^1 dy \eta_\nu(y, E) \Phi_\nu(y, E) \exp[-x' D_\nu(x', E, E_y)], \quad (4.6)$$

где

$$D_\nu(x', E, E_y) = \frac{1 - Z_\nu(x, E_y)}{\lambda_\nu(E_y)} - \frac{1 - Z_\nu(x, E)}{\lambda_\nu(E)} \quad (4.7)$$

$$\eta_\nu(y, E) = \frac{F_\nu^0(E_y)}{F_\nu^0(E)(1 - y)}.$$

К уравнению (4.7) можно применить итерационную схему

$$Z_\nu^{(n+1)}(x, E) = \int_0^x dx' \int_0^1 dy \eta_\nu(y, E) \Phi_\nu(y, E) \exp[-x' D_\nu^{(n)}(x', E, E_y)], \quad (4.8)$$

$$D_\nu^{(n)}(x', E, E_y) = \frac{1 - Z_\nu^{(n)}(x, E_y)}{\lambda_\nu(E_y)} - \frac{1 - Z_\nu^{(n)}(x, E)}{\lambda_\nu(E)}$$

Наконец, выпишем здесь формулы для первого и второго порядка.

$$Z_\nu^{(0)}(x, E) = \int_0^1 dy \eta_\nu(y, E) \Phi_\nu(y, E) = Z_\nu(x = 0, E) \quad (4.9)$$

$$Z_\nu^{(1)}(x, E) = \int_0^1 dy \eta_\nu(y, E) \Phi_\nu(y, E) \frac{1 - \exp[-x' A_\nu(E, E_y)]}{x A_\nu(E, E_y)},$$

где

$$A_\nu(E, E_y) = \frac{1}{\lambda_\nu(E_y)} - \frac{1}{\lambda_\nu(E)} \quad (4.10)$$

4.2 Структура NuPropagator

4.2.1 Пакет nudisxs

Пакет `nudisxs` [28] представляет собой программный инструмент на языке Python, предназначенный для вычисления сечений нейтрино-нуклонного взаимодействия в области глубоконеупругого рассеяния согласно формуле (A.16). С

помощью данного пакета `NuPropagator` получает сечения для нейтринных взаимодействий. Ядро вычислений основано на пакете `XsDis`, написанном на языке Fortran В. А. Наумовым и К. С. Кузьминым (см., например, [28]). Первоначально `XsDis` рассчитывал DIS-сечения для фиксированных партонных функций, и впоследствии был преобразован нами в современный Python-модуль `nudisxs`, поддерживающий динамическую загрузку партонных распределений из библиотеки `LHAPDF6` [29].

Пакет `nudisxs` позволяет рассчитывать дважды дифференциальные сечения по переменным Бьёркена x и y , дифференциальные сечения по одной переменной и полные сечения взаимодействия для широкого диапазона энергий — от нескольких сотен МэВ до 10^{15} ГэВ. Пакет предназначен для использования в задачах нейтринной астрофизики и моделирования событий в нейтринных телескопах. Пакет находится в открытом доступе и может быть легко интегрирован в любые исследовательские проекты.

Пакет реализован на языке Python 3, активно использует библиотеки `NumPy` [30] и `SciPy` [31], а также библиотеку `vegas` [26] для многомерного Монте-Карло интегрирования. Благодаря этому он обладает высокой производительностью и удобен в использовании для анализа, тестирования и встраивания в более крупные симуляционные цепочки.

Пакет `nudisxs` является самостоятельным компонентом генератора нейтринных событий `NuPropagator`, который, в свою очередь, интегрируется в более общий фреймворк `NTSim`, который разрабатывается эксперимента `Baikal-GVD` и других нейтринных телескопов.

Логическая архитектура пакета `nudisxs` представлена на рис. 4.1. Основные компоненты и зависимости включают:

1. Загрузка партонных функций из библиотеки `LHAPDF6`, которые используются для построения структурных функций $F_i(x, Q^2)$, необходимых для расчёта сечений.
2. Модуль `dis` реализует интерфейс пользователя: здесь задаются тип лептона (нейтрино/антинейтрино), мишень (протон, нейтрон или изоскаляр), энергия нейтрино, минимальное значение Q^2 , используемые партонные распределения и другие параметры модели.
3. Модули `xs_cc` и `xs_nc` возвращают дважды дифференциальные сечения для заряженного и нейтрального токов, соответственно.

4. Часть исходного кода, написанного на Fortran, остаётся доступной через интерфейс `f2py` и обеспечивает быстрые и проверенные временем вычисления основных выражений для сечений.
5. Интерполяция PDF и структурных функций, а также численные процедуры, реализованы с помощью `SciPy`.

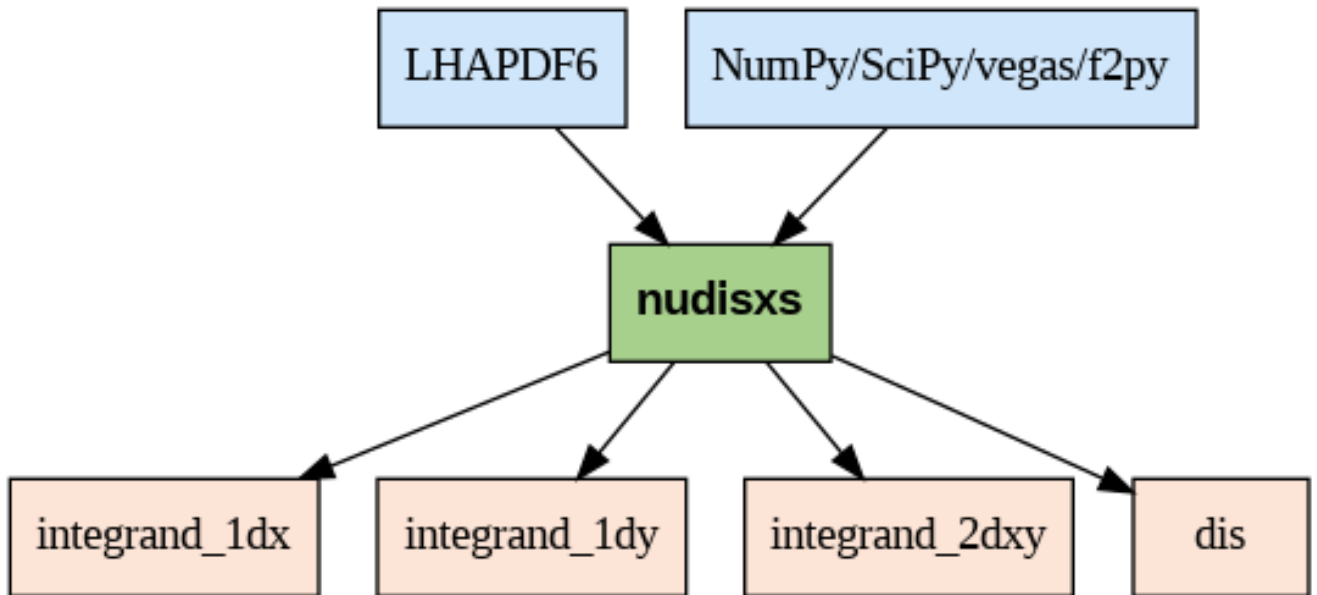


Рисунок 4.1 — Структура программного пакета `nudisxs` и его зависимости.

Пакет занимает менее 120 КБ и поставляется через платформу PyPI как открытое программное обеспечение. Его легко установить и интегрировать в любые пользовательские симуляционные цепочки. В рамках настоящей работы пакет `nudisxs` использован для построения всех сечений, представленных на рис. 4.7–4.8.

4.2.2 Программный пакет NuPropagator

Пакет `NuPropagator` [32] представляет собой модуль для моделирования прохождения потоков нейтрино через вещество, в частности через Землю, с учётом взаимодействий по заряженному и нейтральному токам. Он реализует итеративный метод на основе \mathcal{Z} -фактора, что позволяет учитывать регенерацию нейтрино при рассеянии на нуклонах. Пакет написан на языке Python3 и поддерживается через платформу PyPI, что обеспечивает его доступность и простоту интеграции в существующие симуляционные цепочки.

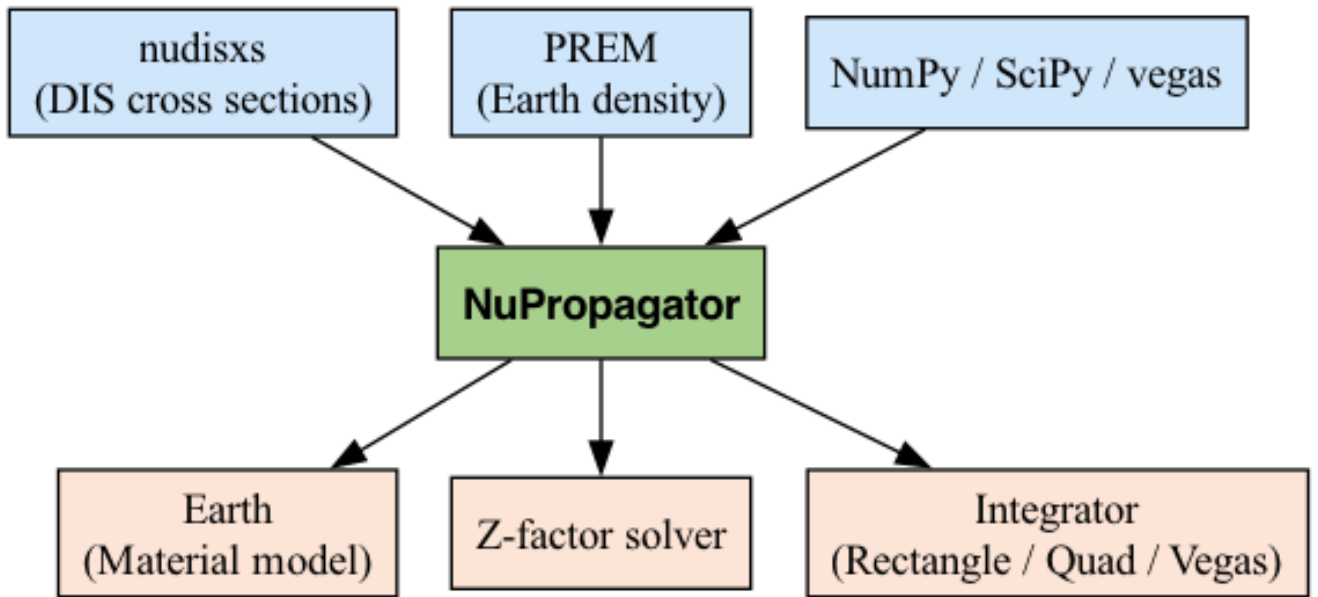


Рисунок 4.2 — Структура программного пакета NuPropagator и его зависимости.

Данный пакет состоит из нескольких модулей, каждый из которых будет разобран более подробно. Здесь дадим их краткое описание.

1. Модуль `Earth` - модуль, описывающий вещество, через которое распространяется нейтрино.
2. Модуль `Cross Section` - модуль, описывающий дважды дифференциальные сечения взаимодействия нейтрино.
3. Модуль `Flux` - модуль, описывающий нейтринные потоки.
4. Модуль `NuPropagator` - модуль, осуществляющий протаскивание нейтрино через толщу вещества.
5. Модуль `Kinematic` - модуль, разыгрывающий конечные состояния частиц после взаимодействия нейтрино с мишенью.

Пакет NuPropagator использует следующие физические компоненты:

- модель плотности Земли (PREM);
- сечения взаимодействия нейтрино с нуклонами, предоставляемые пакетом nudisxs;
- итерационный метод Z-фактора для расчёта эволюции нейтринного спектра.

В качестве модели плотности используется Предварительная эталонная модель Земли (PREM) [33], которая предполагает сферическую симметрию и описывает плотность, давление и другие параметры как функции радиуса. Плотность в модели представлена на рис. 4.3.

Расчёт толщины вещества, проходимого нейтрино, осуществляется интегрированием плотности вдоль траектории. Поддерживаются несколько численных методов: метод прямоугольников, квадратурный метод `quad` из `SciPy`, и метод Монте-Карло `vegas`. Изотопный состав вещества задаётся в модуле `Earth` пакета `NuPropagator`. Данный программный пакет зависит от таких модулей как `Numpy` [30], `SciPy` [31], `Vegas` [26]. Маленькое количество зависимостей от сторонних пакетов и малый вес пакета (менее 300 килобайт) делает его легко интегрируемым в сторонний код.

4.3 Модель Земли и фактор подавления потока

Данный класс описывает вещество, через которое проходит поток нейтрино. В данной работе рассматривается прохождение нейтрино сквозь Землю, поэтому в дальнейшем будем обсуждать только Землю. Однако, данный генератор может работать абсолютно с любыми плотностями, которые будут поданы в него заранее.

Учтем, что проходя сквозь толщу земли, поток нейтрино ослабевает как за счет нейтрального тока, так и за счет заряженного тока. Потери за счет нейтрального тока будут обсуждаться в одном из следующих разделов. Тут же будет обсуждаться потери за счет заряженного тока.

Нейтрино может провзаимодействовать в веществе либо с нуклоном, либо с электроном. Если рассматривать заряженный ток, то промежуточным бозоном в данном случае является W -бозон. Значит, в конечном состоянии можно наблюдать лептон и адроны. Таким образом, нейтрино, провзаимодействовав в веществе за счет заряженного тока, исчезает (Здесь не рассматривает следующая возможная реакцию, описывающая взаимодействие конечного лептона с нуклоном, в результате которой рождается еще одно нейтрино, так как эта реакция сильно подавлена за счет того, что сечение нейтрино взаимодействия нейтрино с веществом очень мало и по порядку величины равно 10^{-38} для 100 ГэВ). Получается, что за счет заряженного тока поток нейтрино просто ослабевает. Аналогично учитывается и выбывание нейтрино за счет нейтрального тока (Так называемый “эффект регенерации”, когда у нейтрино уменьшается энергия за счет нейтрального тока также учитывается, но будет описан позже).

Соответствующий фактор ослабления нейтринного потока за счет взаимодействий имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P(E, x) &= \exp(-x/\lambda_\nu(E)) \\
 \frac{1}{\lambda_\nu(E)} &= \sum_T N_T \sigma_{\nu T}^{tot}(E) \\
 x &= \int_\gamma dl \rho(l)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где N_T — количество рассеивателей на 1 грамм среды типа $T \in \{p, n, e\}$, $\sigma_{\nu T}^{tot}(E)$ - полное сечение рассеяния для взаимодействия νT и сумма берется по всем возможным типам рассеивающих частиц. Переменная x , определяемая как интеграл по траектории нейтрино от плотности вещества, есть толщина вещества, которую проходит нейтрино (т.е. длина пути нейтрино в массовых единицах).

В качестве модели, которая описывает плотность Земли, используется модель PREM (Предварительная эталонная модель Земли, [33]). Эта простая модель сферически симметричной Земли, не учитывающая особенности рельефа поверхности земли. Она включает в себя различные свойства Земли: плотность, давление и гравитацию и остальное. В данной модели вся кора Земли считается однородной. Плотность в модели PREM можно увидеть на рис.(4.3)

Для вычисления переменной x необходимо рассчитать интеграл по траектории нейтрино. Для этих целей используется один из следующих методов: метод прямоугольников (простой метод, дающий хороший результат для функции плотности Земли и работающий быстро для большого количества вызовов функции), метод quad из библиотеки для научных вычислений Scipy (метод, основанный на квадратурных формулах Гаусса) и метод Vegas (Монте-Карло метод, который очень эффективен как для вычисления одномерных, так и для многомерных интегралов). После распространения нейтрино в конечную точку, в ней происходит розыгрыш конечных состояний, в котором учитывается изотопный состав вещества, где происходит взаимодействие. Изотопный состав мишени также задается в модуле Earth.

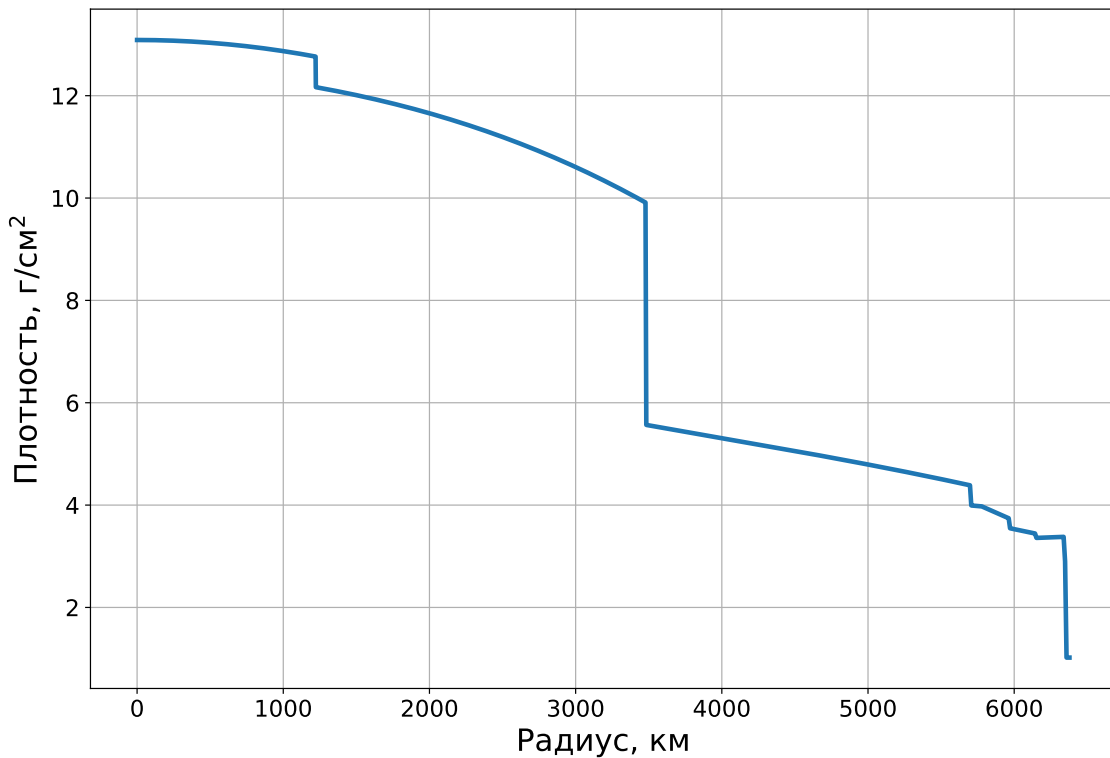


Рисунок 4.3 — Плотность вещества в модели Земли PREM.

4.4 Дважды дифференциальные сечения в NuPropagator

Теперь рассмотрим класс, который отвечает за сечения. Вопрос с сечениями в данном генераторе решен с помощью программы XsDis. Это программный пакет, предназначенный для расчета сечений на основе произвольных партонных функций. Пакет XsDis был написан на языке программирования Fortran Наумовым В.А. и Кузьминым К. и был превращен в модуль на языке Python3. После модернизации (теперь пакет может зачитывать партонные распределения напрямую из программного пакета LHAPDF6 [29], пакет превратился в модуль на питоне nudisxs [28]. Пакет nudisxs предоставляет дважды дифференциальные сечения по переменным Бьеркена x и y , дифференциальные переменные по каждой из переменных и полные сечения взаимодействия для широкого диапазона энергий (от 0.3 ГэВ до области, где действуют партонные модели — энергия порядка 10^{15} ГэВ). Сечения в данном пакете рассчитывают-

ся на основе следующей формулы:

$$\frac{d^2\sigma^{\text{DIS}}}{dxdy} = \frac{G_F^2 M_N E}{\pi(1 + Q^2/M_W^2)} \sum_{i=1}^5 A_i(x, y, E) F_i(x, Q^2), \quad (4.12)$$

где структурные функции рассчитываются исходя из партонных распределений, подаваемых в программу. Квадрат массы адронной системы при этом заключен в диапазоне $[W_{\text{cut}}^2, W_+^2]$, где W_{cut} - полная масса адронной системы, а $W_+ = \sqrt{s} - m_l$. При таких условиях пороговая энергия нейтрино задается формулой

$$E_{\nu}^{\text{th}} = \frac{(W_{\text{cut}} + m_l)^2 - M_N^2}{2M_N}. \quad (4.13)$$

Кинематически допустимая область для переменных Бьеркена задается следующим образом:

$$x^-(W_{\text{cut}}) \leq x \leq x^+(W_{\text{cut}}), \quad (4.14)$$

где

$$x^{\pm}(W_{\text{cut}}) = \frac{a + \sqrt{b}}{2c} \quad (4.15)$$

и

$$\begin{aligned} a(W_{\text{cut}}) &= 1 - \frac{[W_{\text{cut}}^2 - M_N^2 - m_l^2][(W_{\text{cut}}^2 - M_N^2)E_{\nu} + m_l^2 M_N^2]}{2M_N^2(W_{\text{cut}}^2 - M_N^2)E_{\nu}^2}, \\ b(W_{\text{cut}}) &= \left[1 - \frac{(W_{\text{cut}} - m_l)^2 - M_N^2}{2M_N E_{\nu}}\right] \left[1 - \frac{(W_{\text{cut}} + m_l)^2 - M_N^2}{2M_N E_{\nu}}\right], \\ c(W_{\text{cut}}) &= 1 + \frac{(W_{\text{cut}}^2 - M_N^2 - m_l^2)^2}{4E_{\nu}^2(W_{\text{cut}}^2 - M_N^2)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

После того как зафиксирована переменная x , выбирается переменная y из диапазона $[y^{\min}(E_{\nu}, W_{\text{cut}}), y^+(E_{\nu})]$, где

$$\begin{aligned} y^{\min}(E_{\nu}, W_{\text{cut}}) &= \max(y^-(E_{\nu}), y^{\text{cut}}(E_{\nu}, W_{\text{cut}})), \\ y^{\text{cut}}(E_{\nu}, W_{\text{cut}}) &= \frac{W_{\text{cut}}^2 - M_N^2}{2M_N(1-x)E_{\nu}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

и

$$y^{\pm} = \left[1 - \frac{m_l^2}{2E_{\nu}^2} \left(1 + \frac{E_{\nu}}{M_N x}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{m_l^2}{2M_N x E_{\nu}}\right) - \frac{m_l^2}{E_{\nu}^2}}\right] \cdot \left[2 + \frac{M_N x}{E_{\nu}}\right]^{-1} \quad (4.18)$$

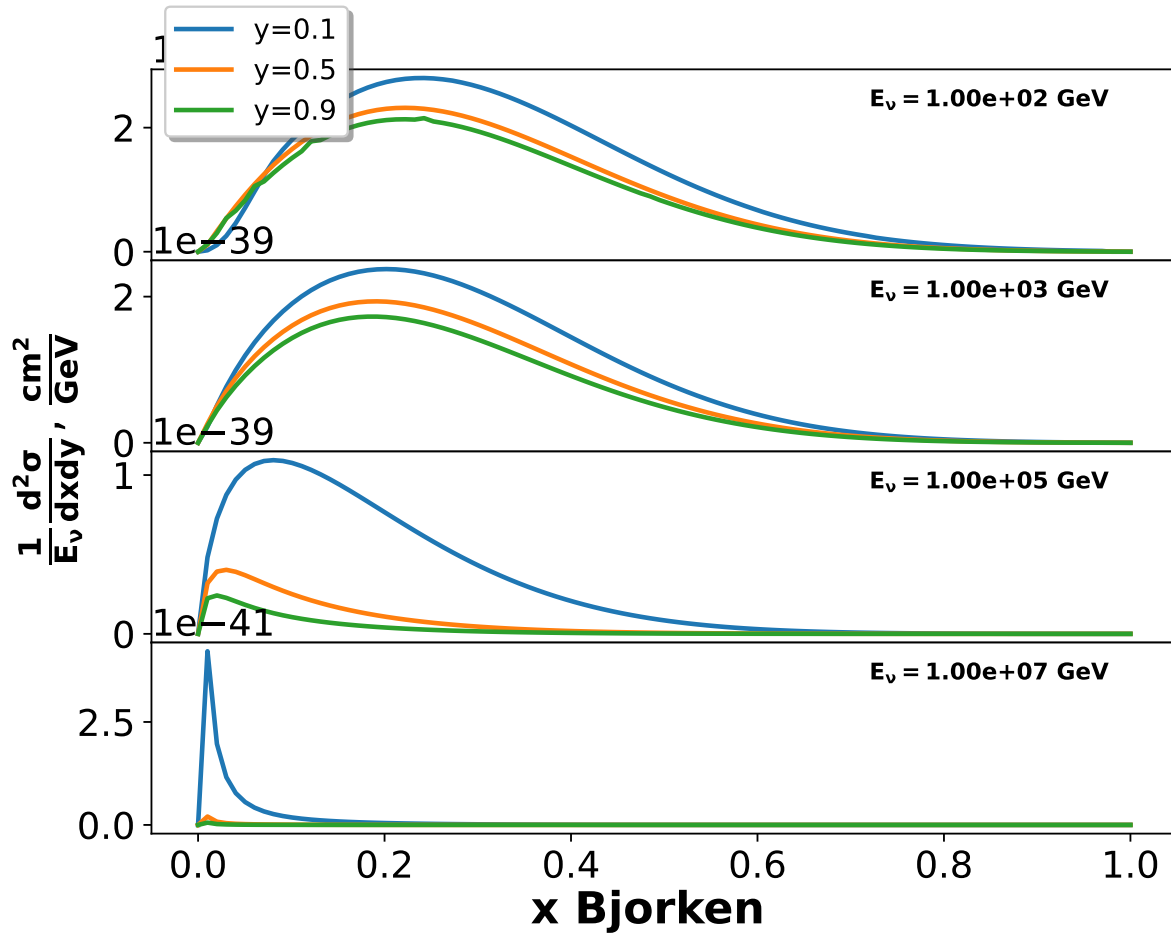


Рисунок 4.4 — Зависимость дважды дифференциального сечения мюонного нейтрино на нуклоне, нормированного на энергию нейтрино при разных значениях x в зависимости от y для модели партонных распределений CT10NLO

На рис. (4.4) - (4.6) представлены типичные зависимости дифференциальных сечений.

На рис. 4.7 представлены дважды дифференциальные сечения $\frac{d^2\sigma}{dx dy}$ для взаимодействия мюонного нейтрино с протоном через обмен бозоном W , рассчитанные при различных энергиях нейтрино и фиксированных значениях переменной y . Характерной особенностью этих графиков является то, что с ростом энергии основная часть сечения смещается в область всё меньших значений переменной Бьёркена x . Это отражает фундаментальную особенность глубоко-неупругого рассеяния: при больших Q^2 всё больший вклад в сечение начинают вносить морские кварки и антикварки.

На достаточно высоких энергиях нейтрино (порядка 0.1 ГэВ) достигается область $x \lesssim 10^{-5}$ и ниже, где партонные распределения плохо определены, поскольку соответствующие данные либо отсутствуют, либо экстраполированы

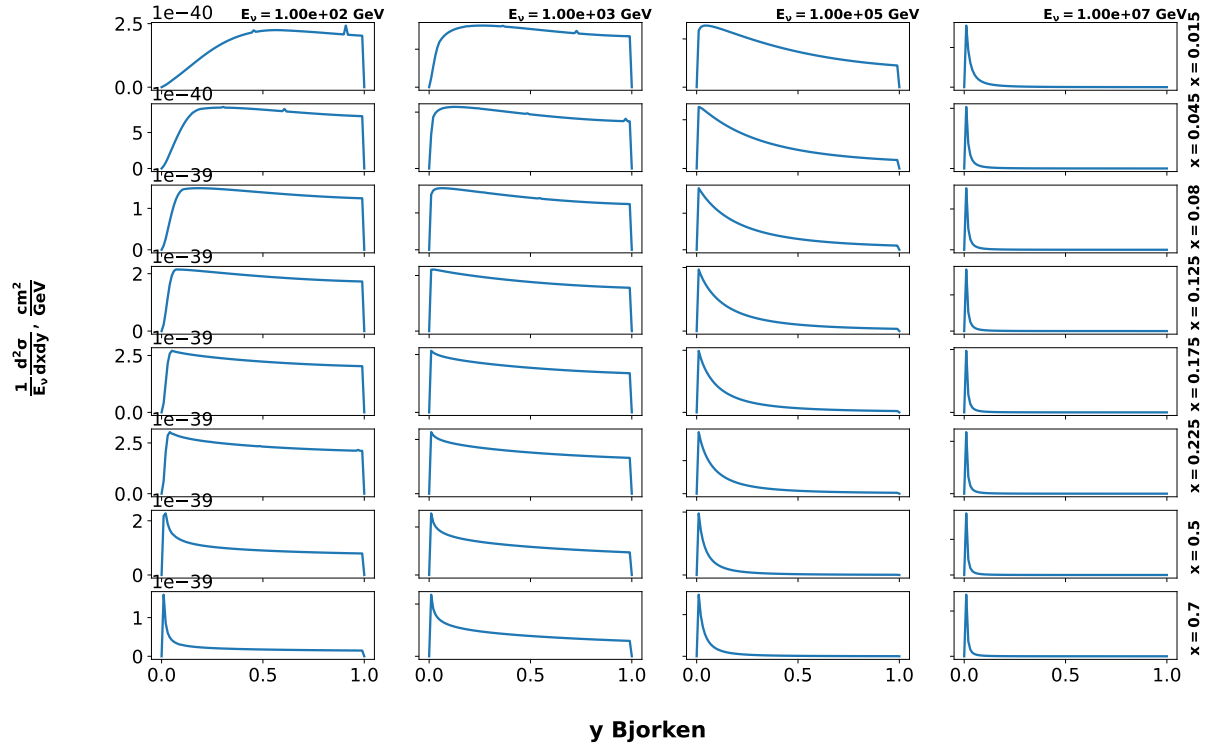


Рисунок 4.5 — Зависимость дважды дифференциального сечения мюонного нейтрино на нуклоне, нормированного на энергию нейтрино при разных значениях y в зависимости от x для модели партонных распределений CT10NLO

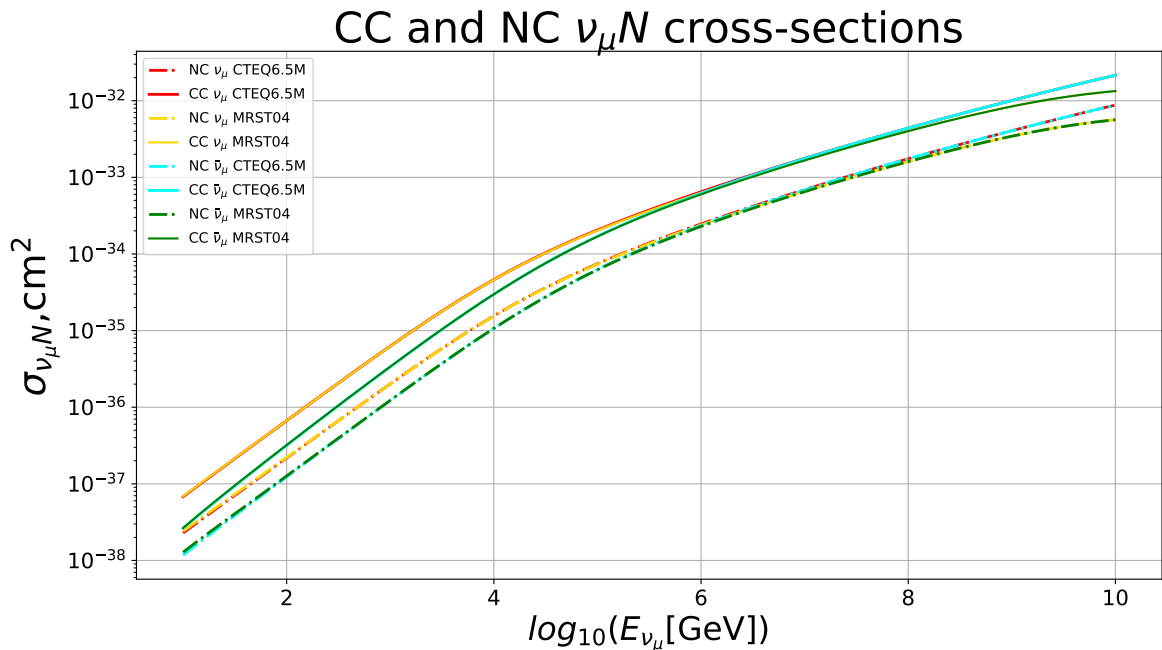


Рисунок 4.6 — Зависимость полного сечения взаимодействия нейтрино на нуклоне от энергии для разных партонных распределений

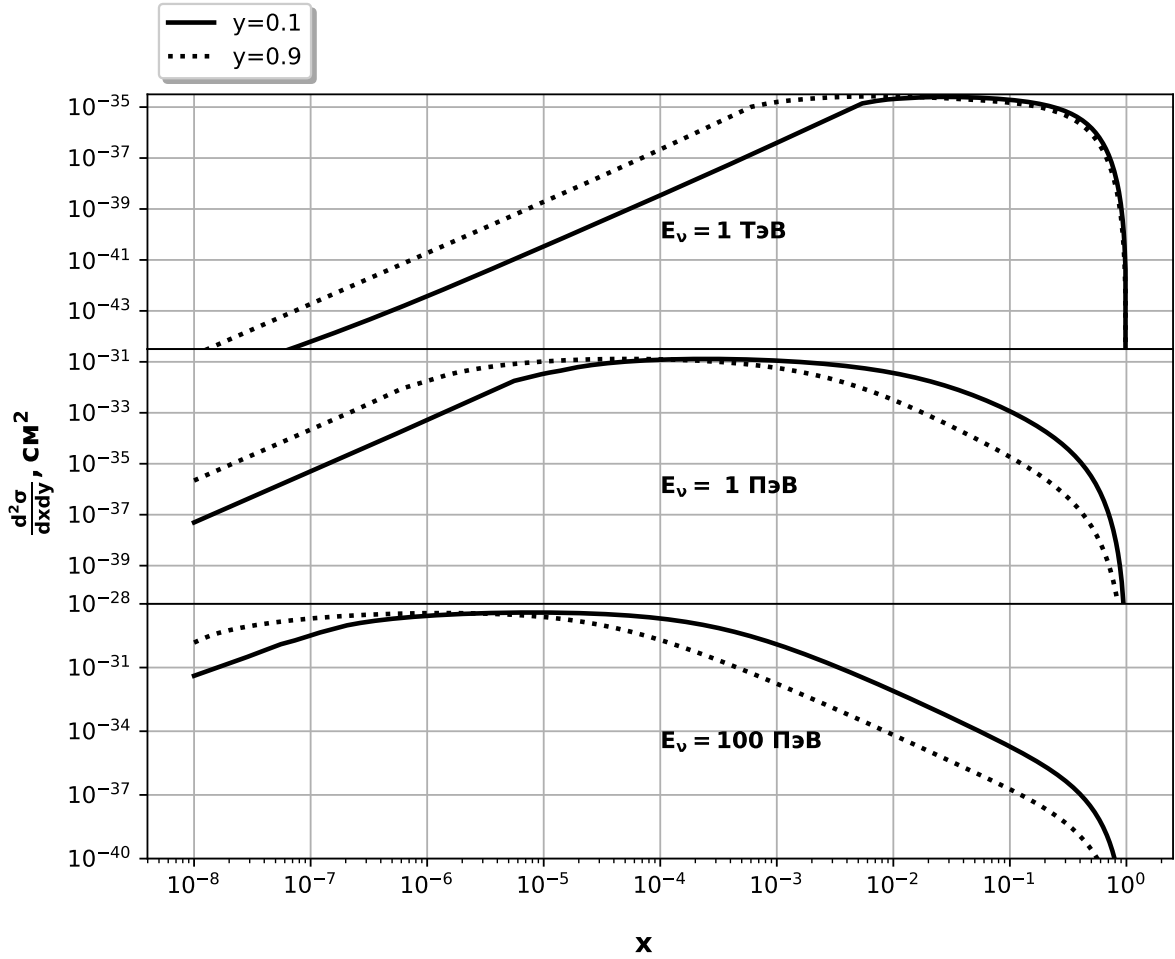


Рисунок 4.7 — Дважды дифференциальные сечения для рассеяния мюонного нейтрино на протоне за счёт заряженного тока в зависимости от переменной Бьёркена x при различных энергиях нейтрино и фиксированных значениях переменной y .

из области $x \gtrsim 10^{-4}$. Это приводит к увеличению неопределённости в расчёте полного сечения, особенно при использовании различных наборов PDF.

Оценка вклада неизмеренного фазового пространства в общее сечение — одна из ключевых целей настоящей работы. На рис. 4.8 показана зависимость полного сечения взаимодействия мюонного нейтрино на нуклоне от энергии для различных партонных распределений. Видно, что при $E_\nu \gtrsim 10^5$ ГэВ расчёты, основанные на разных PDF-наборах, начинают расходиться, отражая растущую модельную неопределённость в области малых x . Именно в этой области наш подход позволяет количественно оценить вклад недостоверно измеренных компонент, таких как морские кварки и глюоны, в предсказания полного сечения.

Для проверки корректности расчётов полный спектр сечений, полученных с помощью `nudisxs`, был сопоставлен с экспериментальными данными по глю-

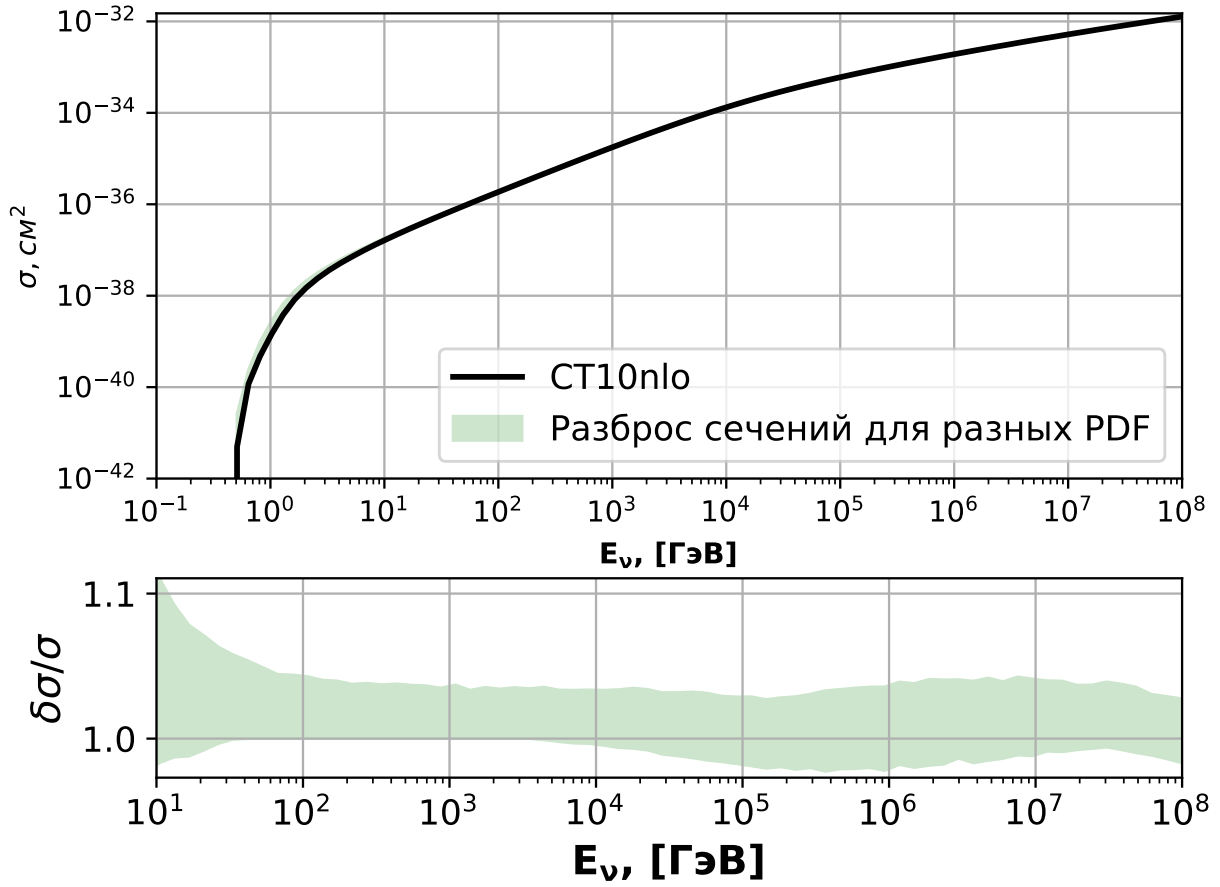


Рисунок 4.8 — Полные сечения взаимодействия мюонного нейтрино на нуклоне в зависимости от энергии E_ν для различных наборов партонных распределений (CT18ZNNLO, nCTEQ15, CT10nlo, TUJU19nlo). Расхождение при высоких энергиях отражает неопределённость поведения PDF при малых x .

боконеупругому рассеянию нейтрино и антинейтрино на нуклонах. На рис. 4.9 показано сравнение предсказаний, полученных с помощью XsDis [34–36] (ядро вычислений nudisxs), с данными различных экспериментов, охватывающих диапазон энергий от единиц ГэВ до 10^6 ГэВ.

Наблюдается хорошее согласие с экспериментальными данными. Более детальный анализ приведён в работах [34–36].

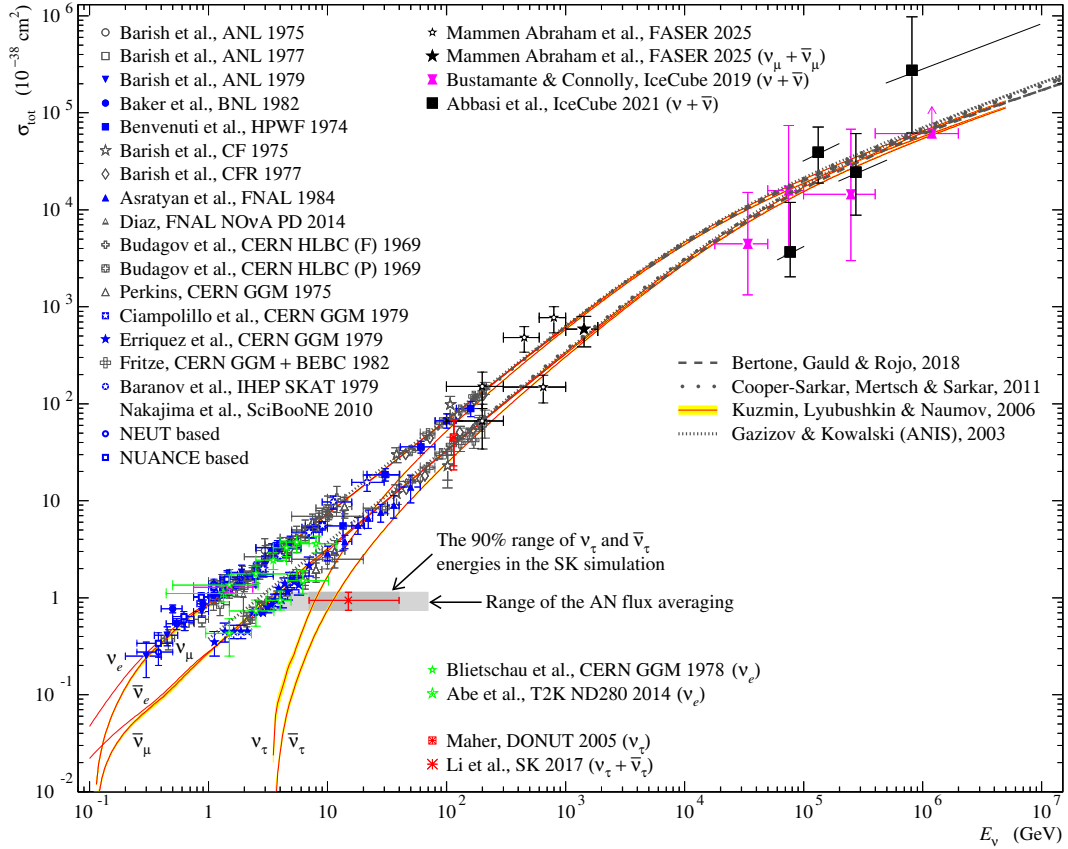


Рисунок 4.9 — Сравнение полного сечения глубококонеупругого рассеяния нейтрино и антинейтрино, рассчитанного с помощью XsDis [34–36].

4.5 Нейтринные потоки

На данный момент в NuProр используются потоки, рассчитанные командой С. И. Синеговского [37] для электронных нейтрино и для мюонных нейтрино. Эти потоки рассчитаны на основе разных моделей космических потоков. Ниже (рис. (4.10) - (4.13)) можно увидеть вклад от трех различных моделей космических лучей. Для потоков предусмотрено несколько возможностей розыгрыша Монте-Карло. Перечислим их:

1. Розыгрыш E_ν и $\cos \theta$ по функции потока $F_\nu(E_\nu, \cos \theta, x_E)$, где функции потока берутся на глубине x_E (эти функции известны заранее благодаря Z-факторному методу).
2. Розыгрыш E_ν и $\cos \theta$ по функции, пропорциональной полному числу взаимодействий нейтрино в среде: $N(E_\nu, \cos \theta, x_E) = F_\nu(E_\nu, \cos \theta, x_E)\sigma(E_\nu)$.
3. Розыгрыш энергии по модельному потоку вида $F_0 E^{-\gamma}$, где параметр γ задается пользователем (по умолчанию $\gamma = 2.7$), а $F_0 E$ соответствует

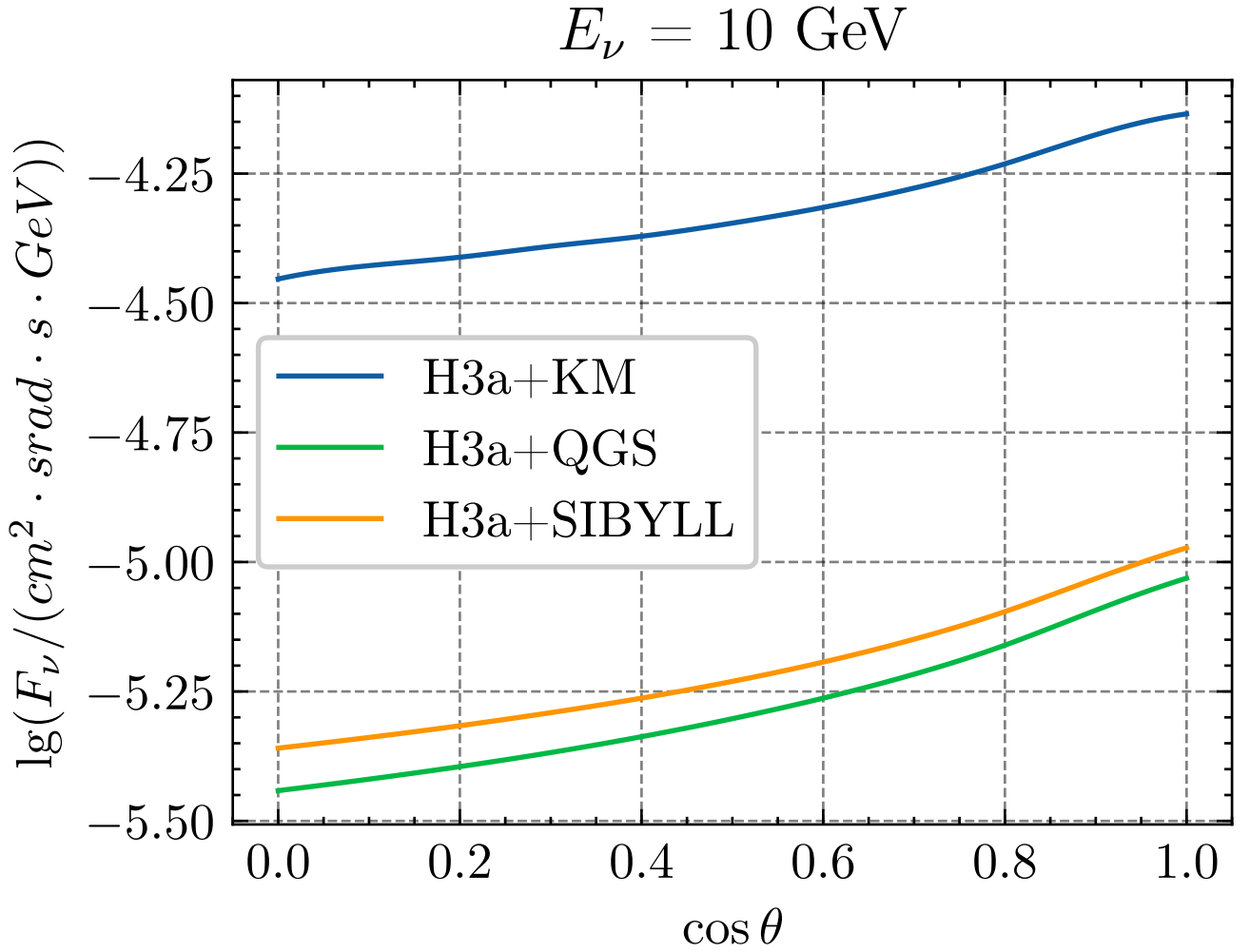


Рисунок 4.10 — Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10 \text{ GeV}$

полной нормировке потока для рассчитанных потоков. В этом случае розыгрыш событий осуществляется с помощью метода обратной функции Монте-Карло. А именно, энергия разыгрывается по следующему правилу:

$$E = E_{\min} \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}} \right)^\xi, \text{ если } \gamma = 1 \quad (4.19)$$

$$E = \left(E_{\min}^{1-\gamma} + \xi(E_{\max}^{1-\gamma} - E_{\min}^{1-\gamma}) \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ если } \gamma \neq 1$$

где ξ - случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, E_{\min} и E_{\max} - минимальная и максимальная энергии, интересующие нас. Косинус угла в этом случае разыгрывается равномерно.

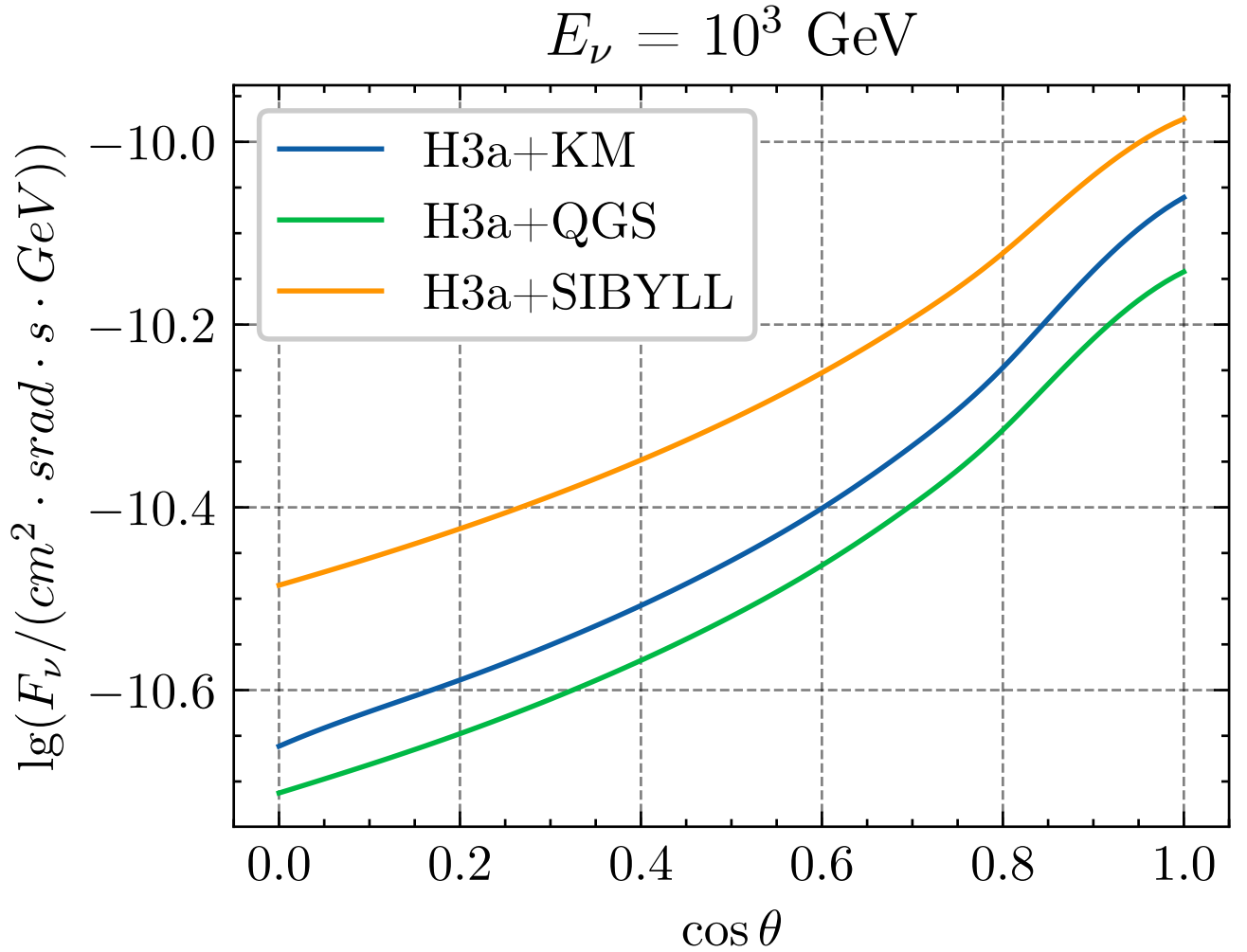


Рисунок 4.11 — Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10^3 \text{ GeV}$

4.6 Розыгрыш кинематики

Главная задача моделирования кинематики - розыгрыш Бьеркеновских переменных x и y . По ним легко восстанавливается вся кинематика взаимодействия. В самом деле, если известны x и y , то энергия конечного лептона и угол рассеяния есть

$$E_l = E_\nu(1 - y)$$

$$\cos \Theta = \frac{E_l - Mx - \frac{m_l^2}{2E_\nu}}{\sqrt{E_l^2 - m_l^2}} \quad (4.20)$$

Эти формулы позволяют полностью восстановить направление конечного лептона (угол φ разыгрывается равномерно). Кинематика адронной системы

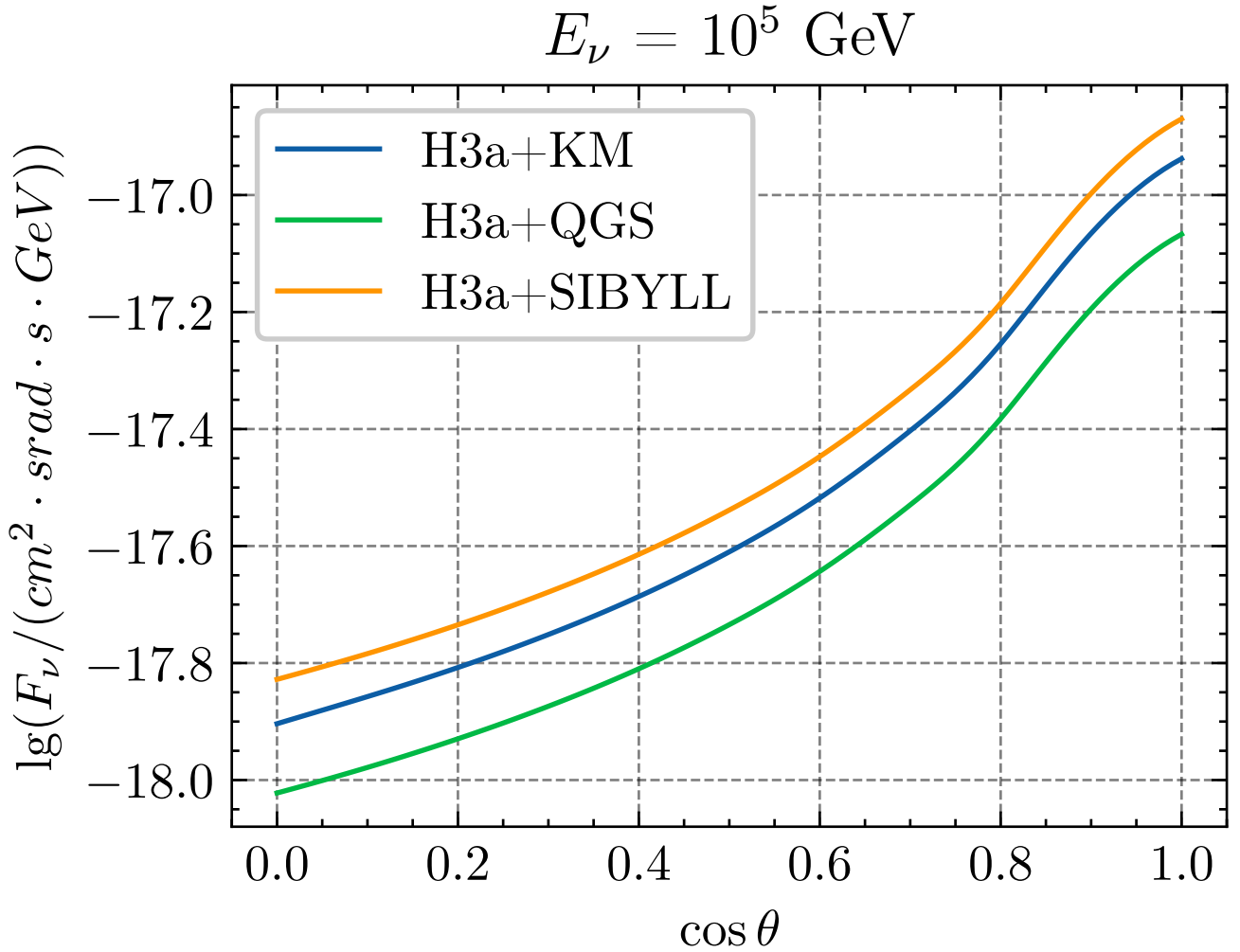


Рисунок 4.12 — Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10^5 \text{ GeV}$

получается исходя из закона сохранения энергии-импульса. Направления конечных частиц разыгрываются в системе, где импульс нейтрино направлен по оси Oz , после этого производится поворот к изначальному направлению с помощью кватернионных методов из библиотеки SciPy/Python3. На данный момент реализовано 2 способа розыгрыша переменных x и y . Перечислим их:

1. Использование метода отбора фон Неймана для дважды дифференциальных сечений (при заданной энергии начального нейтрино). Этот метод требует заранее посчитанных полных сечений и максимумов сечений при всех энергиях начального нейтрино. Сам метод отбора фон Неймана состоит в следующем: разыгрываются случайные точки, распределенные равномерно в прямоугольнике и после этого отбираются только точки, лежащие ниже функции распределения, которую мы хотим разыграть.

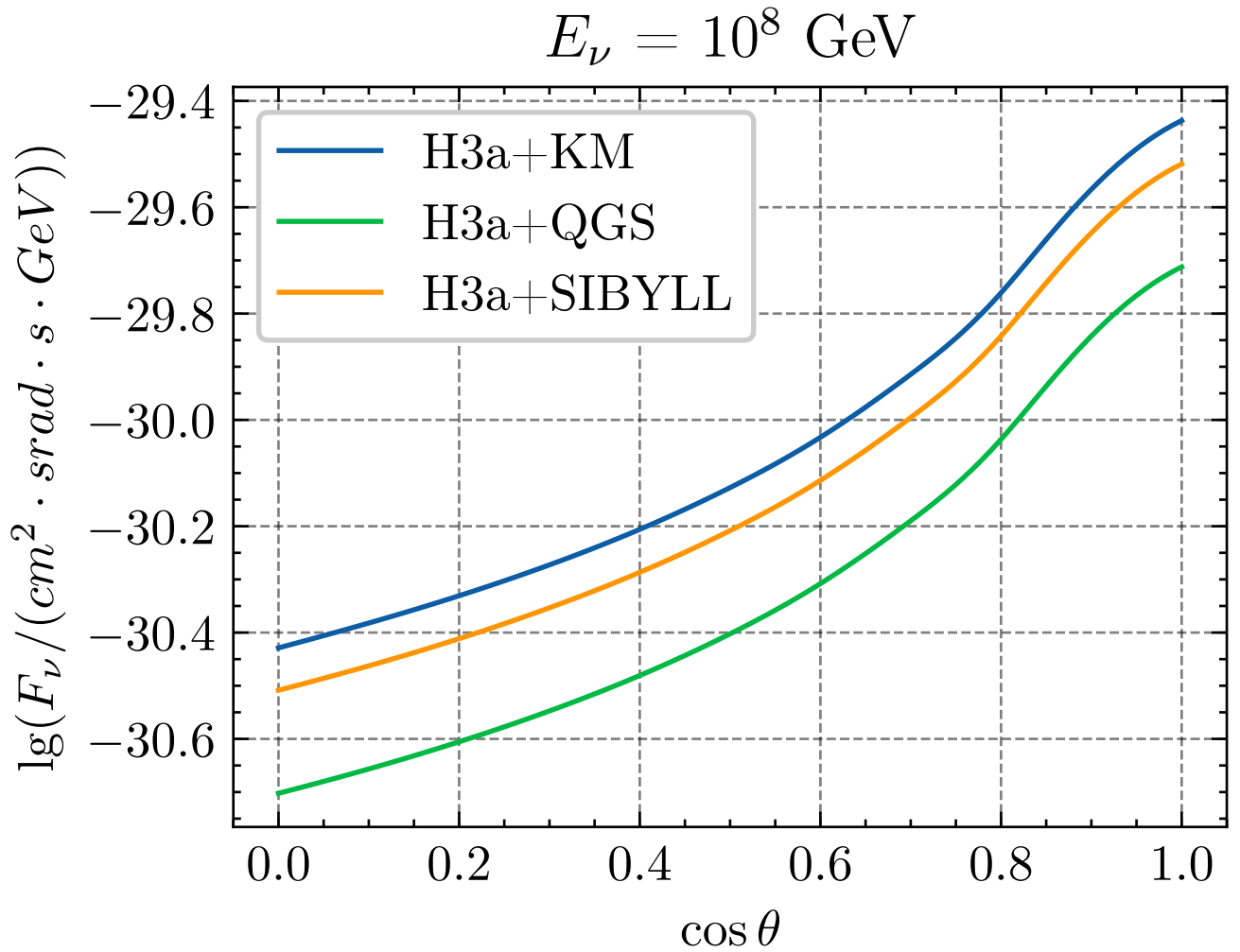


Рисунок 4.13 — Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10^8 \text{ GeV}$

- Использование пакета Vegas/Python3 как генератора случайных величин. Для этого необходимо, чтобы интегратор из модуля Vegas произвел интегрирование дважды дифференциального сечения (т.о. полные сечения считаются во время генерации). Хотя здесь и приходится вычислять двойной интеграл во время разыгрывания переменной, этот метод оказывается довольно эффективным, так как сама процедура интегрирования происходит быстро и в результате получаются сгенерированных пар (x, y) в большом количестве.

4.6.1 Сравнение с другими программными пакетами

Проведем сравнение результатов, полученных с помощью двух программных пакетов: nuFATE [38] и NuPropagator. Будем сравнивать потоки мюонного нейтрино, приходящих под разными углами после прохождения через землю в некоторой точке, находящейся на глубине 1 км от поверхности Земли. В качестве нейтринного потока на поверхности земли был использован степенной поток E^{-2} . Также построим переменную δ_{asym} в зависимости от энергии, которая определяется следующим образом:

$$\delta_{asym} = 2 \frac{F_{\nu}^{NuPropagator}(E, x) - F_{\nu}^{nuFATE}(E, x)}{F_{\nu}^{NuPropagator}(E, x) + F_{\nu}^{nuFATE}(E, x)} \quad (4.21)$$

Как можно видеть из рис. 4.14 результаты находятся в хорошем согласии

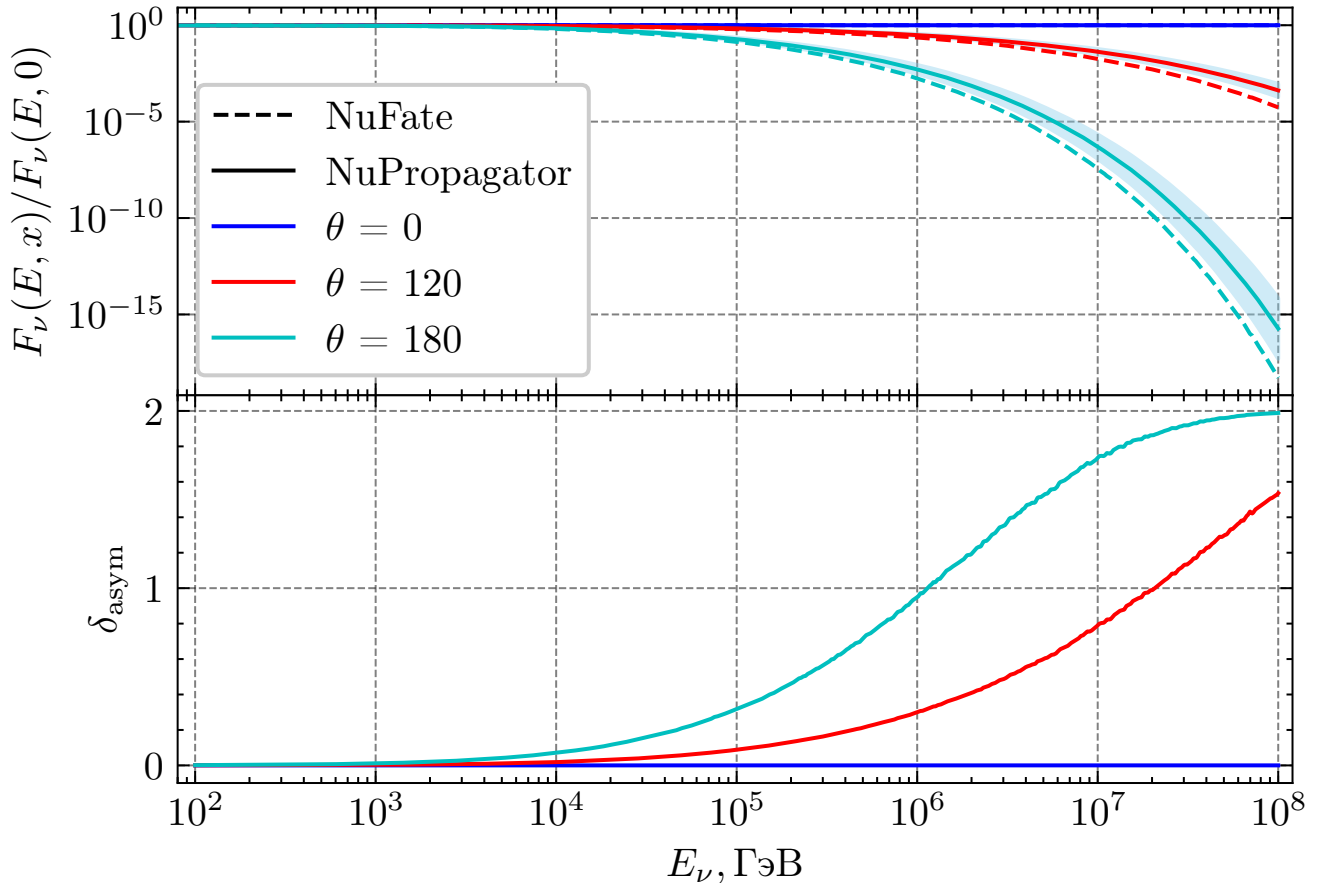


Рисунок 4.14 — Сравнение потоков, полученных с помощью nuFATE и NuPropagator для разных углов прилета нейтрино.

при энергиях меньше 10^6 ГэВ. Дальнейшее расхождение можно объяснить как отсутствием учета эффекта регенерации потоков за счет таонного нейтрино,

различным поведением моделей сечений при больших энергиях, различными численными способами решения кинетических уравнений, которым описывается эволюция потоков нейтрино.

4.7 Надежность партонной модели при ПэВ-энергиях

4.7.1 Области фазового пространства (x, Q^2)

Как упоминалось ранее, дважды-дифференциальные сечения являются функциями энергии нейтрино E_ν и Бьеркеновских переменных x и y . Но также можно описывать сечение в переменных (E_ν, x, Q^2) , где $Q^2 = 2M_N E x y$ - квадрат переданного 4-импульса лептона нуклону. Переменная Бьеркена x изменяется от 0 до 1. Переменная Q^2 для ГНР (для рассмотренных партонных моделей) имеет минимальное значение порядка 1 ГэВ². На рис. (4.15) можно видеть реальные данные [39], полученные в экспериментах на коллайдерах и в экспериментах с фиксированной мишенью.

4.7.2 Визуализация 2D-сечений с отсечками

Можно поглядеть, как сечения, получаемые с помощью nudisxs, связаны с экспериментальными данными. На графиках (4.16)-(4.18) можно увидеть зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$, которое определено следующим образом:

$$F_\sigma(x, Q^2) = \frac{1}{\sigma(E_\nu)} \int_x^1 dx \int_{Q^2}^{Q_{max}^2} dQ^2 \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2}. \quad (4.22)$$

Здесь $\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2}$ - дважды-дифференциальное сечение рассеяния нейтрино на нуклоне. Линии указывают области, где сечения насыщаются до определенного уровня. Серая штриховка показывает экспериментально доступную область.

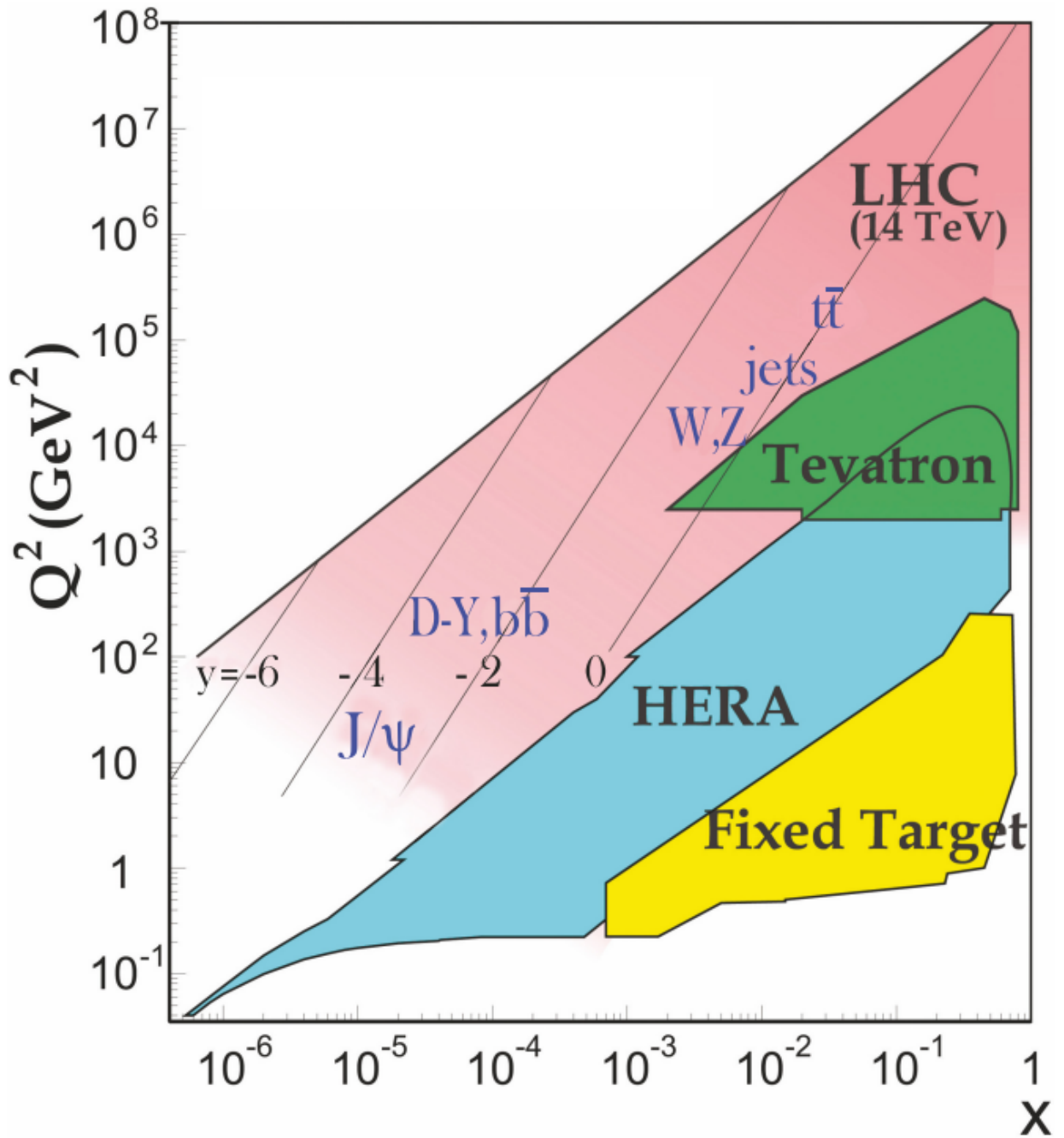


Рисунок 4.15 — Кинематические области в x и Q^2 , исследованные в экспериментах с неподвижной мишенью и на коллайдере [39].

Видно, что область насыщения сечений частично выходит из области экспериментальных данных. При высоких энергиях - это область в диапазоне $10^2 \leq Q^2 \leq 10^{4.5}$ и $10^{-5} \leq x \leq 10^{-9}$.

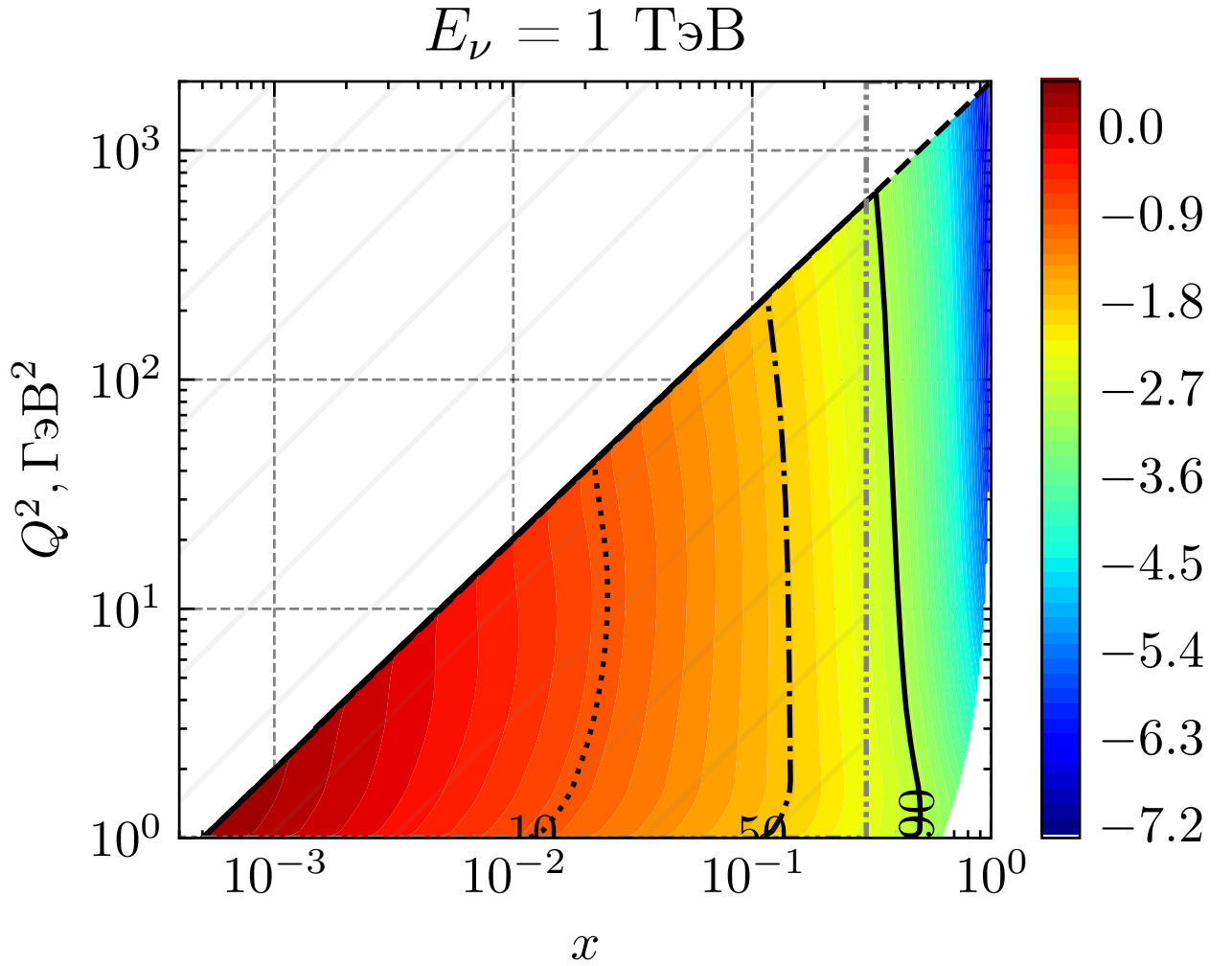


Рисунок 4.16 — Зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$ в зависимости от переменной Бьеркена x и переменной Q^2 для энергии нейтрино $E_\nu = 1 \text{ TeV}$ для модели партонных распределений CT10nlo[40].

4.8 Чувствительность к структуре Земли

4.8.1 Спектроскопия ядра Земли с нейтрино

При прохождении нейтрино сквозь Землю мы должны учитывать, что нейтрино в толще земли может взаимодействовать посредством заряженного и нейтрального токов. В качестве примера рассмотрим следующий модельный поток нейтрино на поверхности Земли:

$$F_\nu^0(E) = K \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\gamma+1} (1 + E_0/E)^{-\alpha} \varphi \left(\frac{E}{E_{cut}} \right), \quad (4.23)$$

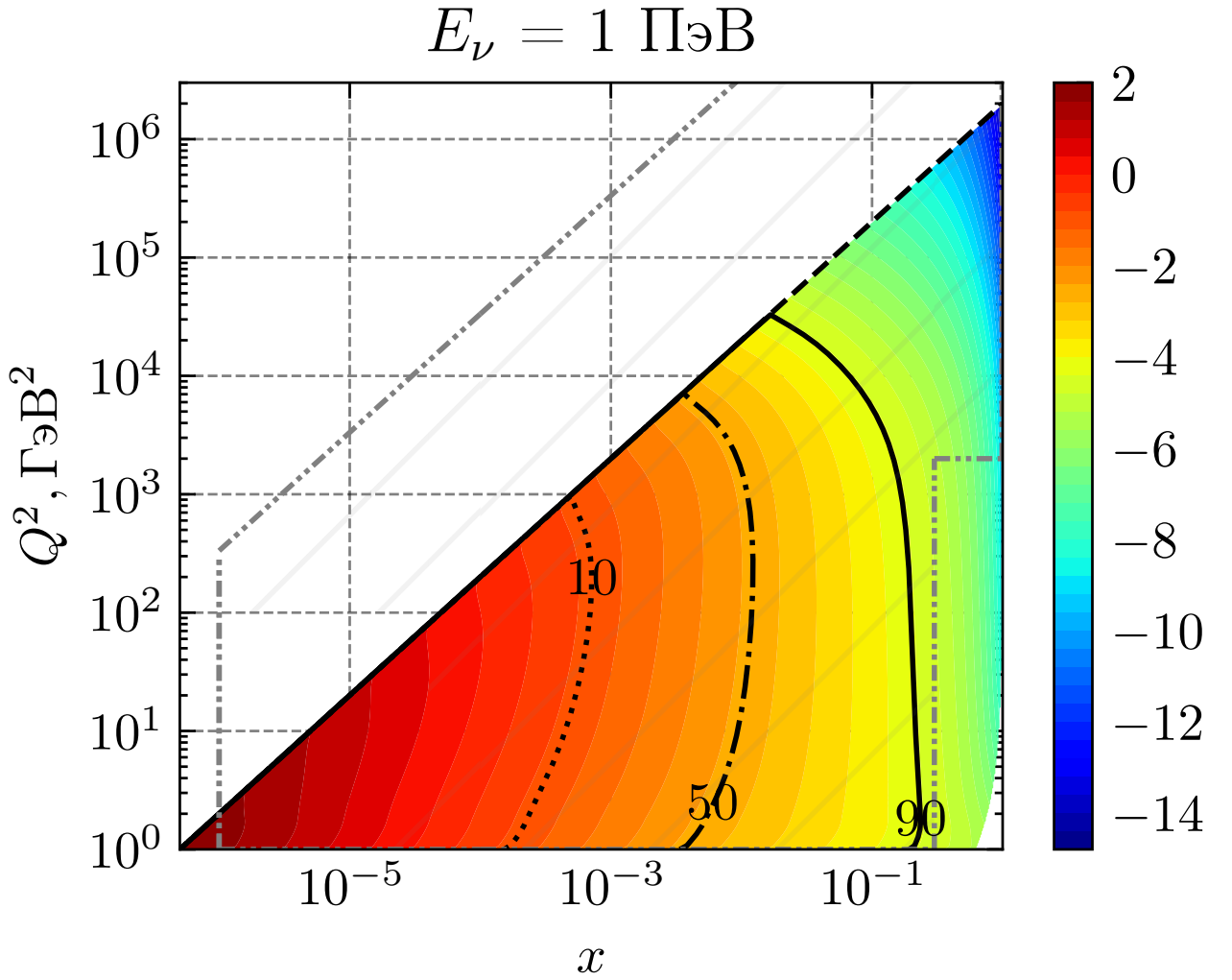


Рисунок 4.17 — Зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$ в зависимости от переменной Бьёркена x и переменной Q^2 для энергии нейтрино $E_\nu = 1 \text{ PeV}$ для модели партонных распределений CT10nlo[40].

где $\varphi_{cut}(t)$ - некоторая функция, предназначенная для резкого обрезания потоков при энергиях выше некоторого порога. В качестве такой функции возьмем следующую функцию:

$$\varphi(t) = (1 + \text{tg}(\pi t/2))^{-1} \quad (4.24)$$

В дальнейшем будем считать, что $\gamma = 1$ и $\alpha = 0.5$. В качестве точки взаимодействия нейтрино возьмем точку на глубине 1 км от поверхности Земли. Эволюцию потоков нейтрино при прохождении сквозь Землю можно увидеть на рис. (4.19). Здесь θ_d - угол прилета нейтрино относительно детектора (схематическое расположение углов можно увидеть на рис. (4.19) справа), $\Phi_{CC}(\theta_d, E)$ - потоки нейтрино в детекторе, если бы мы учитывали изменение только за счет заряженного тока, $\Phi_{CC+NC}(\theta_d, E)$ - потоки нейтрино в детекторе, если бы

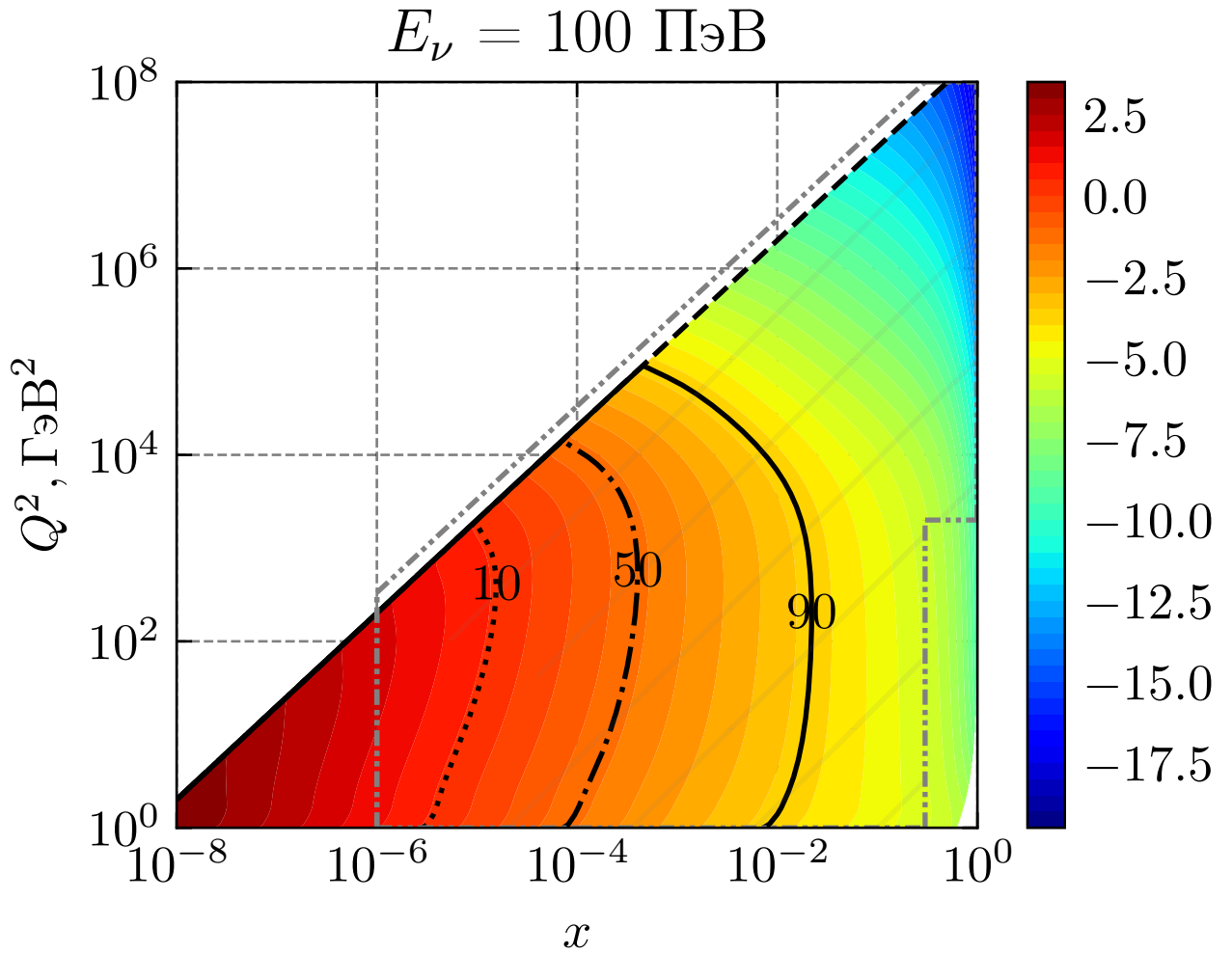


Рисунок 4.18 — Зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$ в зависимости от переменной Бьёркена x и переменной Q^2 для энергии нейтрино $E_\nu = 100 \text{ PeV}$ для модели партонных распределений CT10nlo[40].

мы учитывали изменение за счет заряженного и нейтрального токов. Можно видеть, что при энергиях нейтрино выше 1 ПэВ нейтральный ток начинает оказывать большой эффект при распространении нейтрино сквозь Землю. Особенно эффект становится ощутим, если траектория нейтрино проходит через ядро Земли. Данная картинка подсказывает нам эксперимент по спектрографии Земли. Если взять пучок нейтрино высоких энергий (1 ТэВ) и пустить его сквозь Землю по диаметру, поставив два детектора с противоположных сторон, мы сможем измерять потоки нейтрино до и после их прохождения через Землю. Так как при распространении нейтрино практически не изменяет своего направления, можно учесть эффект поглощения нейтрино за счет заряженного тока. Таким образом, превышение потоков нейтрино во втором детекторе от ожидаемых потоков (изменившихся только за счет поглощения) позволит оценить плотность ядра Земли (т. к. основной эффект увеличения потоков дает

именно ядро). При распространении нейтрино от одной точки в другую через

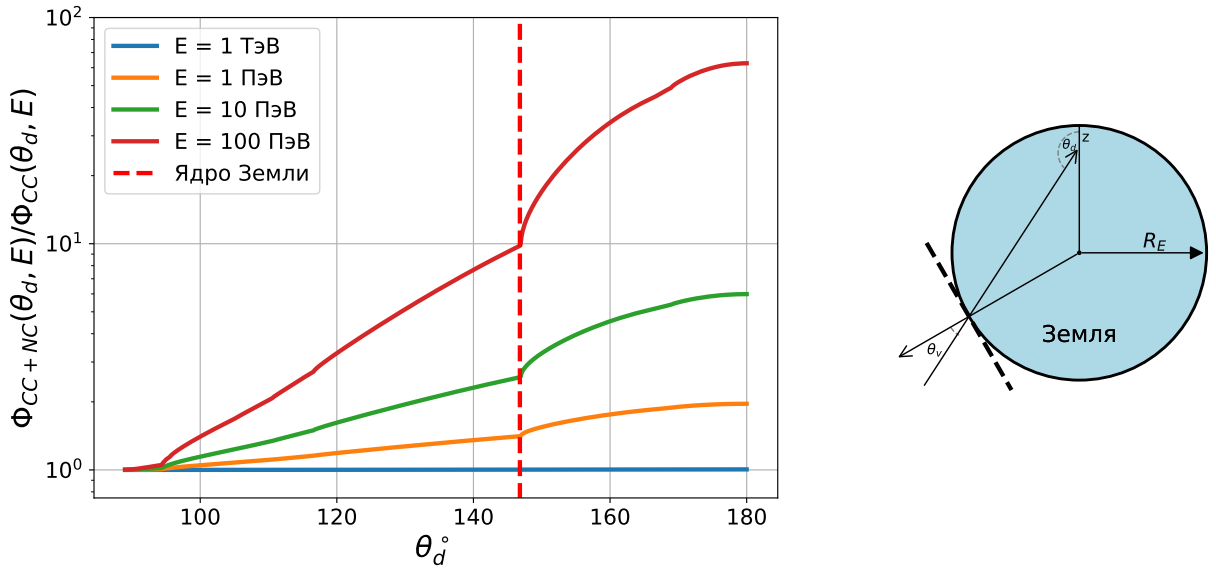


Рисунок 4.19 — Вклад взаимодействий нейтрино за счет нейтрального тока в общий поток в точке наблюдения потока в зависимости от угла прилета нейтрино относительно детектора для разных значений энергии нейтрино. Здесь z - глубина, на которой находится детектор, θ_d - угол прилета нейтрино, относительно детектора, θ_n - угол прилета нейтрино, относительно нормали к Земле, R_E - Радиус Земли.

толщю вещества учитывается как обычный фактор затухания нейтрино, так и фактор, связанный с регенерацией потока (учет реакций, когда конечным лептоном является также нейтрино). В соответствии с процедурой, описанной ранее, для потоков мюонных нейтрино можно построить соответствующую экспоненциальную поправку к затуханию. Полную же картину распространения нейтрино можно увидеть на рис. (4.20).

4.8.2 Поглощение нейтрино в среде

Полную картину распространения нейтрино в зависимости от энергии нейтрино и зенитного угла относительно детектора можно увидеть на рис. (4.20). Здесь учтено поглощение потока, которое дается экспоненциальной поправкой, и регенерация потока, рассчитанная с помощью процедуры \mathcal{Z} -фактора.

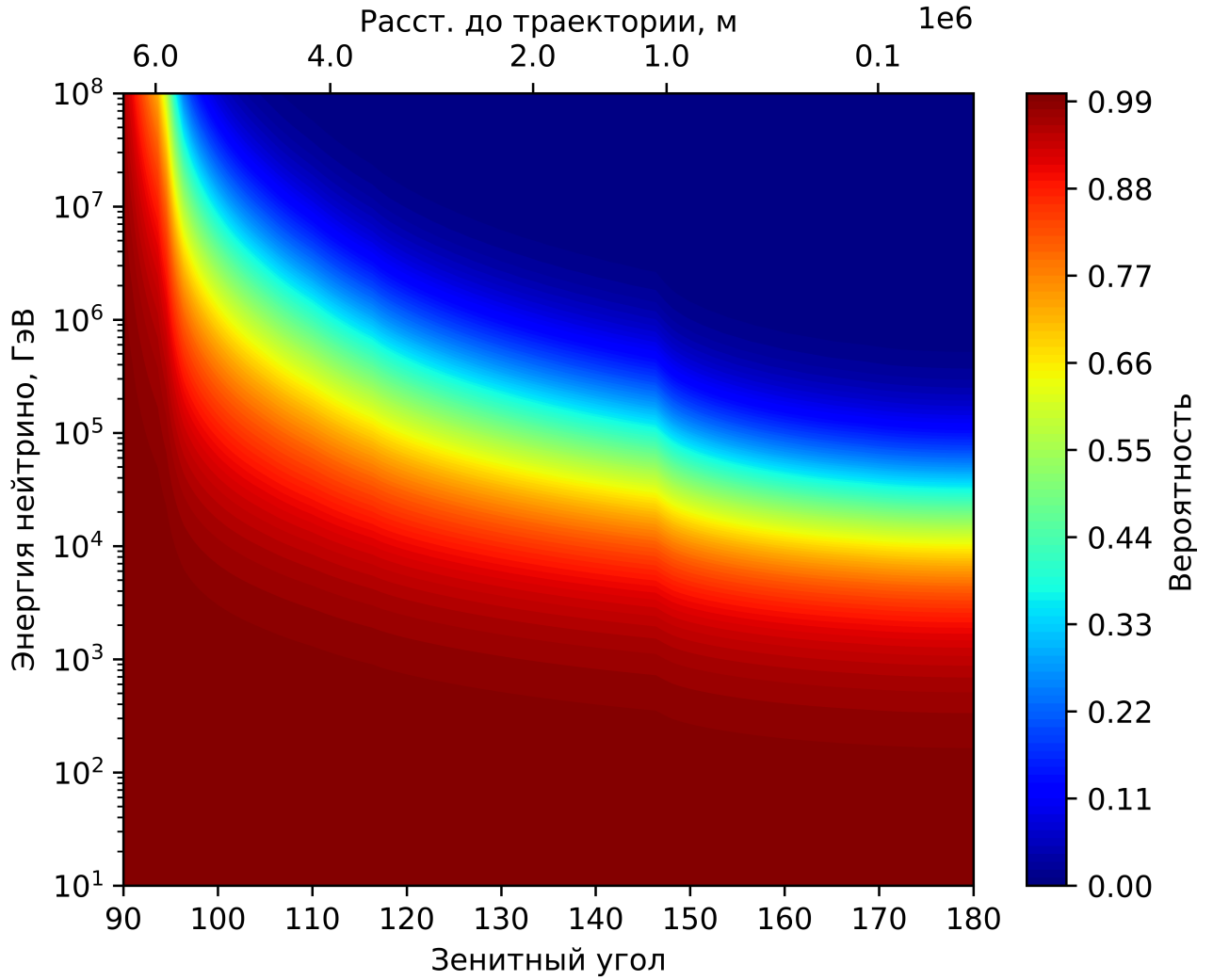


Рисунок 4.20 — Вероятность прохождения нейтрино сквозь Землю в зависимости от энергии и зенитного угла, измеряющегося относительно детектора.

4.8.3 Поглощение за счет нейтрального и заряженного токов

В конце зададимся вопросом, как изменяется показатель потока при прохождении нейтрино сквозь Землю за счёт разных взаимодействий. Предположим, что начальный и конечный потоки имеют форму

$$F_{in/fin}(E) = \Phi_0 E^{-\gamma_{in/fin}(E)}. \quad (4.25)$$

На рис. (4.21) можно видеть, что показатель потока начинает сильно изменяться при энергиях выше 10 ТэВ. Таким образом, для нейтрино высоких энергий, проходящих сквозь Землю, спектр будет сильно изменяться, поэтому количество событий для таких нейтрино будет сильно меньше ожидаемых. Нейтрино же, летящие сверху, не подвергнутся такому подавлению потока.

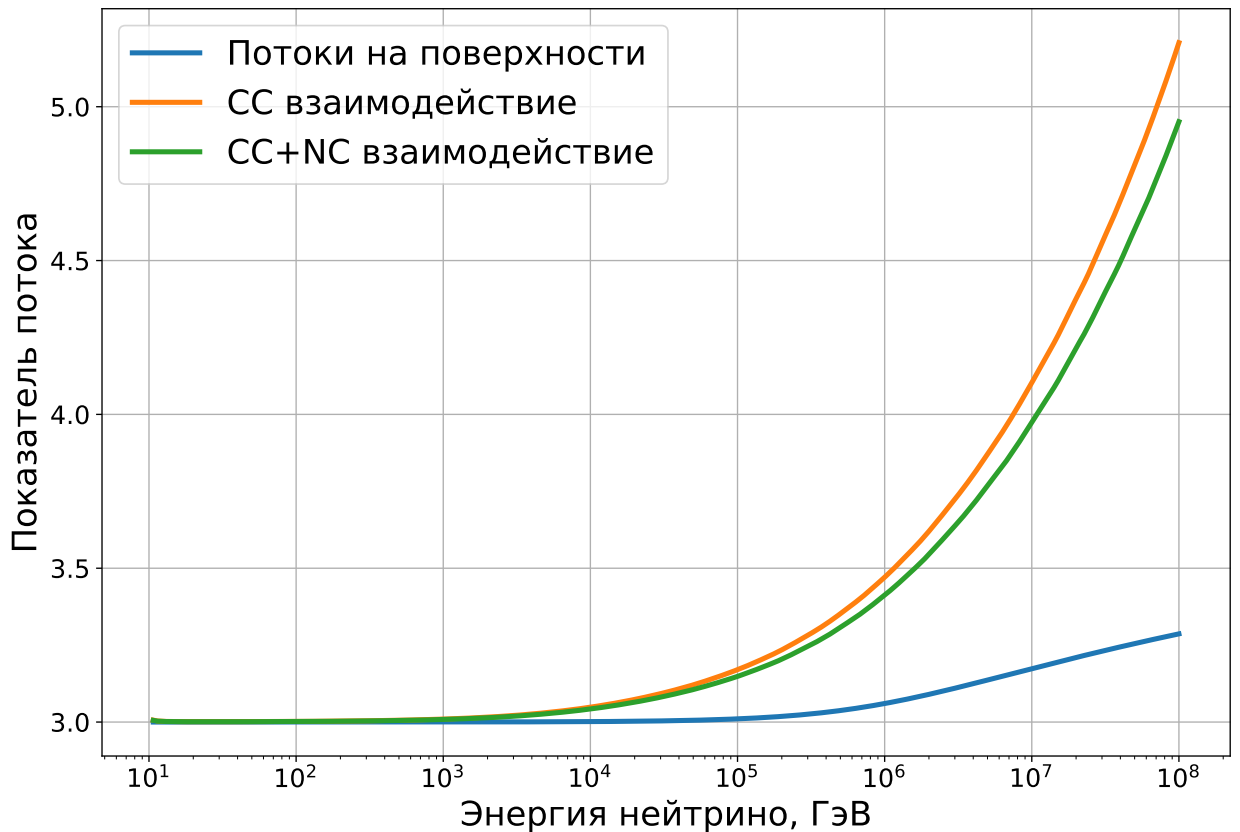


Рисунок 4.21 — Изменение показателя потока нейтрино для пучка, проходящего сквозь Землю в зависимости от энергии при учете разных типов взаимодействия.

4.8.4 Томография Земли с помощью нейтрино

Рассмотрим возможность уточнить плотность Земли с помощью нейтрино. На данный момент вся информация о плотности Земли получена косвенным образом из сейсмологических данных [33]. Однако, можно получать также информацию о плотности с помощью распространения нейтрино в Земле. Одни анализы основаны на осцилляциях нейтрино низких энергий в веществе. В случае же высоких энергий длина осцилляции намного больше радиуса Земли, поэтому осцилляциями можно пренебречь. Однако есть другой способ, основанный на том, что при прохождении нейтрино сквозь Землю происходят два конкурирующих процесса. С одной стороны, потоки нейтрино убывают за счет поглощения нейтрино в среде. С другой стороны, потоки перераспределяются

за счет взаимодействия по нейтральному току (обсуждавшийся выше эффект регенерации). В зависимости от длины пути и от плотности вещества вдоль этого пути, мы будем получать разные числа событий в детекторе.

В данной работе мы проведем анализ, предположив, что у нас есть две гипотезы: H_0 и H_1 . Гипотеза H_0 будет утверждением о том, что модель плотности PREM верна. В качестве альтернативной гипотезы будем рассматривать простейшие отклонения от данной модели. Рассмотрим три альтернативные модели: модель с усредненным ядром, модель с линейным ядром и модель с усредненными мантией и ядром. Анализ будем проводить с помощью статистики χ^2 . Найдем полные числа событий нейтринном телескопе объемом 1 км^3 за один год для каждой из гипотез и на основании статистики примем либо отклоним гипотезу H_0 . χ^2 будем рассчитывать по формуле

$$\Delta\chi^2 = 2 \sum_{ij} (N_{ij}^{(0)} - N_{ij}^{(1)} + N_{ij}^{(1)} \ln(N_{ij}^{(1)}/N_{ij}^{(0)})), \quad (4.26)$$

где N_{ij}^k - количество нейтринных событий в определенном диапазоне по углам и энергии, соответствующих k -й гипотезе.

1. **Усредненное ядро и мантия.** В качестве альтернативной гипотезы возьмем модель плотности, равной 8.853 г/см^3 в области внутреннего ядра, внешнего ядра и мантии (до 5600 км). В остальной же области модель будет совпадать с моделью PREM. Для данной пары гипотез (H_0 , H_1) получено значение $\Delta\chi^2 = 6.84$, что соответствует статистической значимости 2.62σ при одном числе степеней свободы.
2. **Усредненное ядро.** В качестве альтернативной гипотезы возьмем модель плотности, равной 11.87 г/см^3 в области внутреннего ядра и внешнего ядра. В остальной же области модель будет совпадать с моделью PREM. Для пары гипотез (H_0 , H_1) получено $\Delta\chi^2 = 0.114$, что соответствует статистической значимости 0.34σ . Если увеличить время наблюдения до 25 лет либо использовать нейтринный телескоп существенно большего объёма (например, 30 км^3), ожидаемая значимость возрастает до $\sim 2\sigma$.
3. **Линейное ядро.** Теперь в качестве альтернативной гипотезы возьмем модель плотности, где плотность аппроксимируется линейной функцией в области внутреннего ядра и внешнего ядра. В остальной же области модель будет совпадать с моделью PREM. Для этой пары гипотез (H_0 , H_1) получено $\Delta\chi^2 = 0.601$, что соответствует статистической

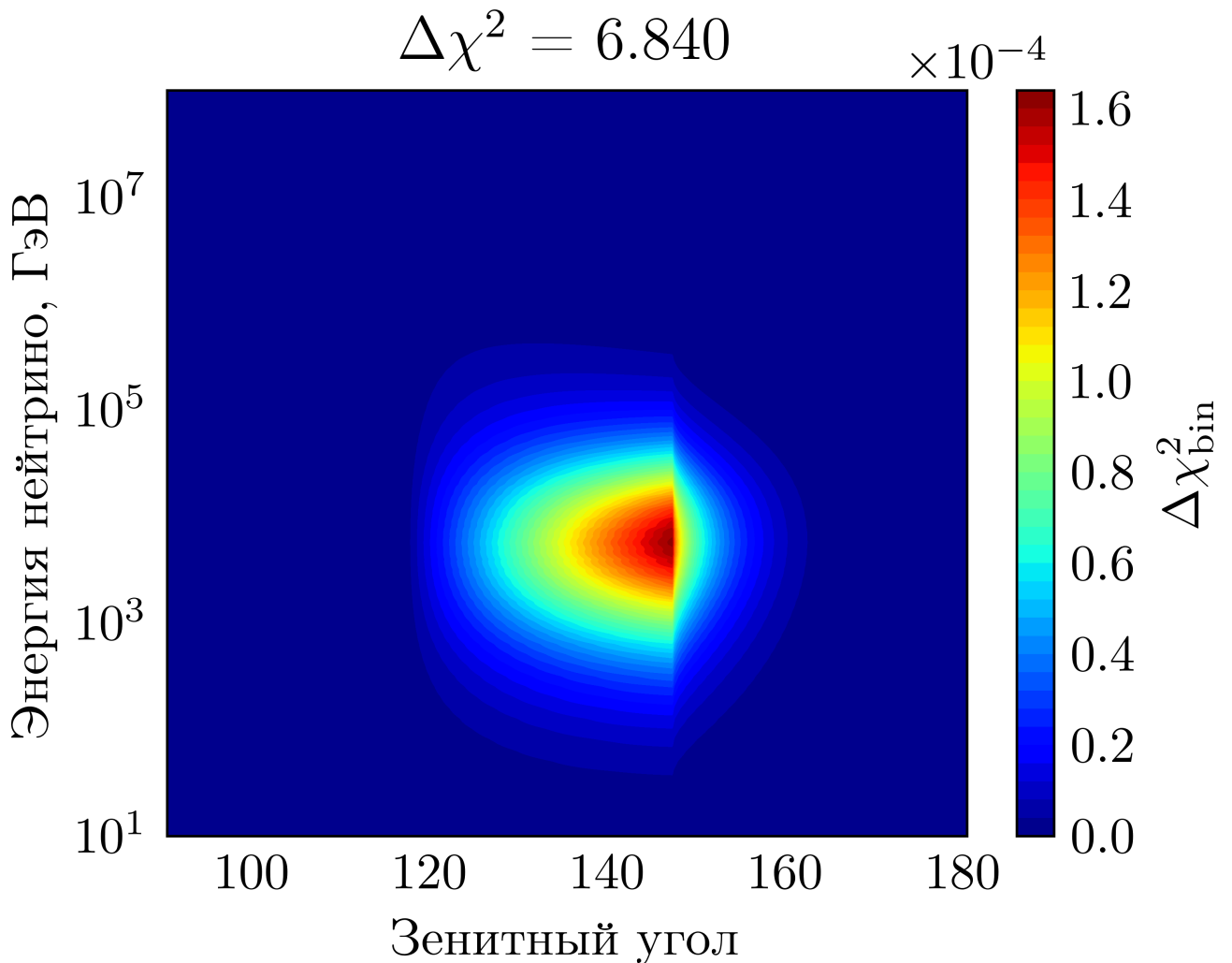


Рисунок 4.22 — Распределение $\Delta\chi^2$, полученное на основе сравнения чисел нейтринных событий в предположении двух гипотез, где в качестве альтернативной гипотезы взята гипотеза усредненного ядра и мантии

значимости 0.76σ . При увеличении времени наблюдения до десяти лет ожидаемая значимость достигает $\sim 2.5\sigma$.

На основе распределений статистики $\Delta\chi^2$ (рис. 4.22 - рис. 4.24) можно видеть, что диапазон энергии, особенно чувствительный для нейтринной томографии - $10^2\text{ГэВ} - 10^6\text{ГэВ}$, причем пик приходится на 10^4 ГэВ . В этой области среда становится непрозрачной для нейтрино и, в свою очередь, потоки еще не слишком маленькие, как при больших энергиях. Максимум же по углу зависит от того, какую альтернативную модель плотности мы рассматриваем (при изменении плотности в слое мантии, максимум по углам будет смещаться влево к меньшим углам).

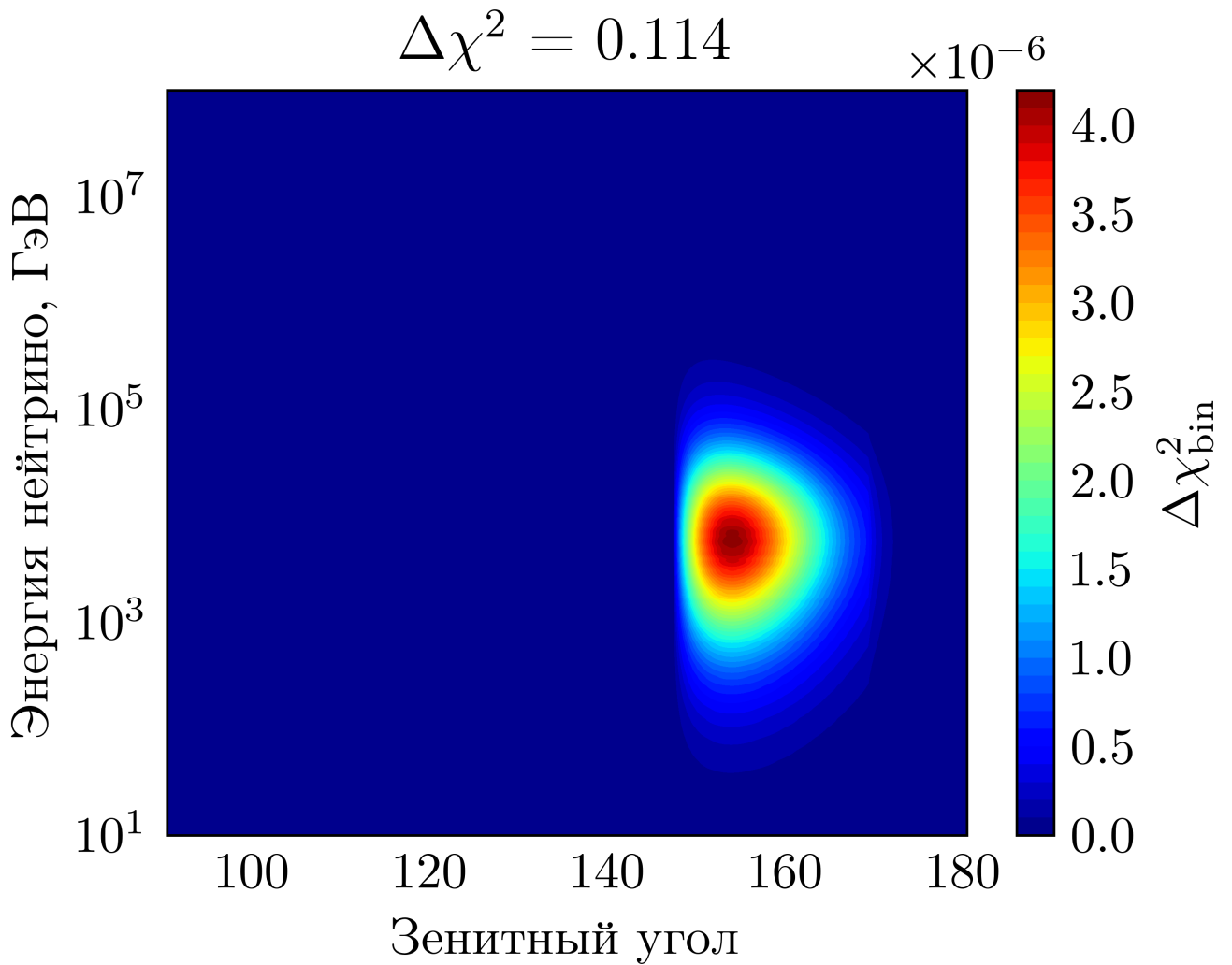


Рисунок 4.23 — Распределение $\Delta\chi^2$, полученное на основе сравнения чисел нейтринных событий в предположении двух гипотез, где в качестве альтернативной гипотезы взята гипотеза усредненного ядра

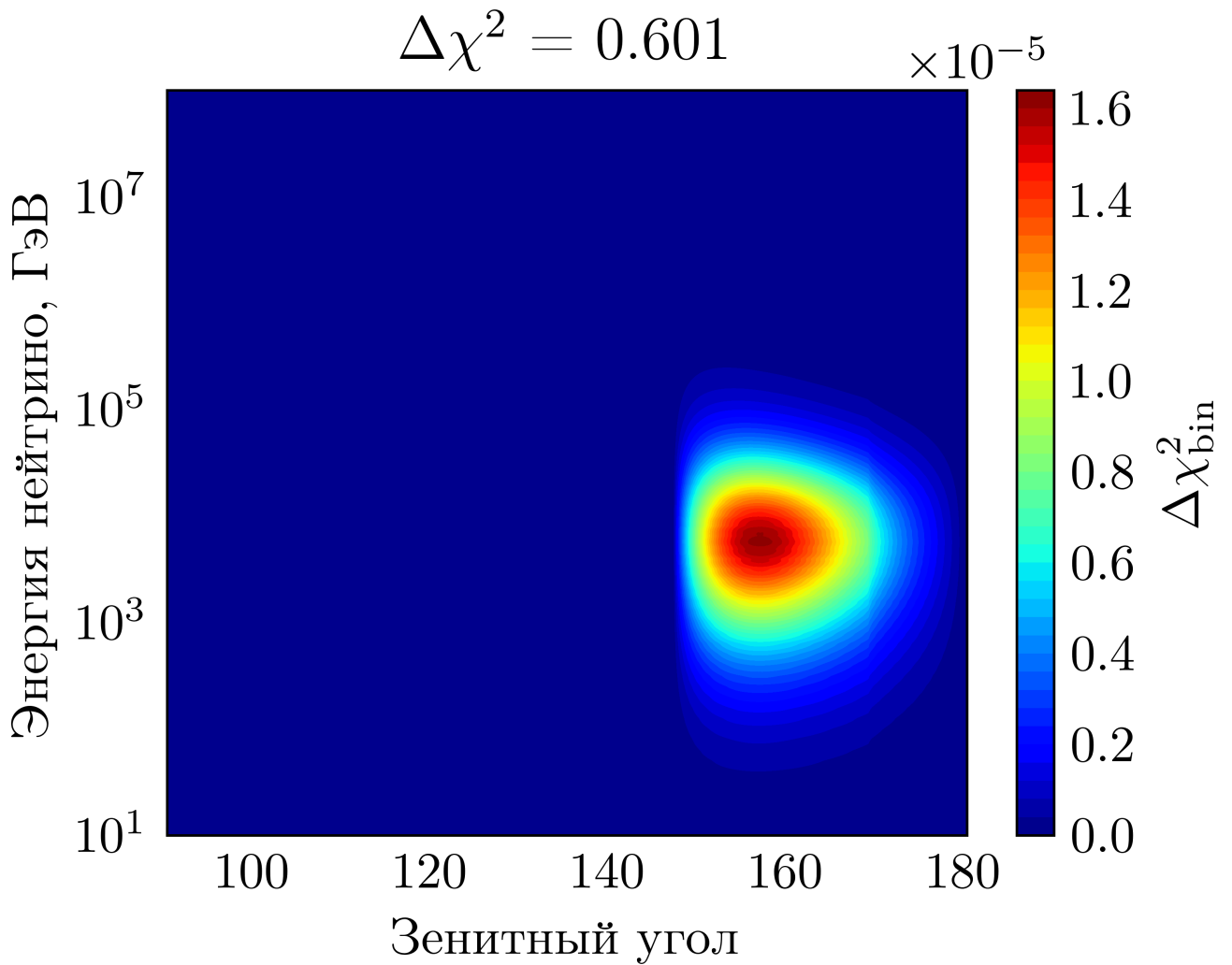


Рисунок 4.24 — Распределение $\Delta\chi^2$, полученное на основе сравнения чисел нейтринных событий в предположении двух гипотез, где в качестве альтернативной гипотезы взята гипотеза линейного ядра

4.9 Резюме

В данной главе был описан генератор нейтринных взаимодействий `NuPropagator`. В данной главе были описаны составляющие генератора:

1. Были описаны нейтринные потоки, рассчитанные командой С. И. Синеговского. Было описано разнообразие методов генерации начального нейтрино.
2. Были описаны дважды дифференциальные сечения и формулы, на основе которых они рассчитываются в программном модуле `nudisxs`. Также описана кинематика при глубоко-неупругом рассеянии нейтрино на нуклоне и генерации конечных частиц в данном взаимодействии. Рассмотрены различные способы генерации случайной Бьерконовских переменных.
3. Земля описывается моделью PREM.
4. Описано распространение нейтрино в земле и также реализовано изменение потоков нейтрино за счет взаимодействия в среде по нейтральному и заряженному токам

Заключение

В настоящей диссертационной работе решены актуальные задачи, связанные с моделированием переноса электромагнитного излучения и нейтрино в контексте регистрации сигналов на нейтринных телескопах. Полученные результаты позволяют существенно улучшить точность и эффективность моделирования отклика установок, таких как Baikal-GVD, и открывают новые возможности для нейтринной астрономии и геофизики.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Получено точное аналитическое решение одномерного и трёхмерного уравнений переноса излучения в рассеивающей среде в виде рядов по числу рассеяний. Решение выражается через модифицированные функции Бесселя и позволяет описывать переход от баллистического режима к диффузионному. Пространственные моменты решения демонстрируют характерное поведение: линейный рост средней координаты на малых временах и насыщение на больших.
2. Разработана итерационная схема решения трёхмерного уравнения переноса, которая позволяет учитывать вклады различных порядков рассеяния. Показано, что для большинства практических задач достаточно учёта первых нескольких порядков. Предложен метод ускорения сходимости Монте-Карло моделирования за счёт замены параметров рассеяния, что позволяет сократить вычислительные затраты.
3. Получены выражения для нулевого и первого порядков интенсивности излучения, испускаемого релятивистской частицей в среде. Показано формирование черенковского конуса и учтено влияние рассеяния на форму сигнала.
4. Созданы специализированные программные модули:
 - а) `RTE` – для расчёта переноса излучения на основе аналитических решений,
 - б) `nudisxs` – для вычисления сечений глубоко-неупругого рассеяния нейтрино на нуклонах с использованием современных партонных распределений,
 - в) `NuPropagator` – для моделирования транспорта нейтрино через вещество с учётом нейтрального и заряженного токов.

5. Проведены расчёты потоков нейтрино в зависимости от энергии и зенитного угла с учётом поглощения и регенерации. Показано, что нейтрино высоких энергий чувствительны к плотностной структуре Земли, что открывает возможность нейтринной томографии.
6. Результаты, полученные с помощью разработанных методов и программ, продемонстрировали хорошее согласие с данными, полученными методом Монте-Карло, а также с результатами, предоставленными генератором nuFATE.
7. Разработанные методы и программное обеспечение будут использованы в рамках коллаборации Baikal-GVD для моделирования событий и анализа данных. Результаты работы также могут быть применены в других нейтринных экспериментах (IceCube, KM3NeT), а также в задачах нейтринной томографии Земли.

Таким образом, диссертационная работа вносит значительный вклад в развитие методов моделирования физических процессов в нейтринных телескопах и открывает новые возможности для многоканальной астрофизики и геофизики.

Благодарности

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Наумову Д. В. за поддержку, помощь, наставничество, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Шешукова А. С. и Завьялова С. И. за помощь в работе и обсуждение результатов и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список литературы

1. The IceCube Neutrino Observatory: instrumentation and online systems [Текст] / М. Aartsen [и др.] // Journal of Instrumentation. — 2017. — Март. — Т. 12, № 03. — P03012–P03012. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/12/03/P03012>.
2. Letter of intent for KM3NeT 2.0 [Текст] / S. Adrián-Martínez [и др.] // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. — 2016. — Июнь. — Т. 43, № 8. — С. 084001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/43/8/084001>.
3. The Baikal-GVD neutrino telescope: search for high-energy cascades [Текст] / V. A. Allakhverdyan [и др.]. — 2021. — arXiv: 2108.01894 [astro-ph.HE]. — URL: <https://arxiv.org/abs/2108.01894>.
4. *Greisen, K.* End to the Cosmic-Ray Spectrum? [Текст] / K. Greisen // Phys. Rev. Lett. — 1966. — Апр. — Т. 16, вып. 17. — С. 748–750. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.16.748>.
5. CR Project [Текст]. — URL: https://github.com/carmeloevoli/The_CR_Spectrum.
6. *Frampton, P. H.* Unstable Heavy Particles [Текст] / P. H. Frampton, S. L. Glashow // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Июнь. — Т. 44, вып. 23. — С. 1481–1483. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.44.1481>.
7. Introduction to neutrino astronomy [Текст] / A. G. Rosso [и др.] // The European Physical Journal Plus. — 2018. — Т. 133.
8. IceCube high-energy starting event sample: Description and flux characterization with 7.5 years of data [Текст] / R. Abbasi [и др.] // Physical Review D. — 2021. — Июль. — Т. 104, № 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.022002>.
9. Characteristics of the Diffuse Astrophysical Electron and Tau Neutrino Flux with Six Years of IceCube High Energy Cascade Data [Текст] / M. G. Aartsen [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Сент. — Т. 125, вып. 12. — С. 121104. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.121104>.

10. *Stettner, J.* Measurement of the diffuse astrophysical muon-neutrino spectrum with ten years of IceCube data [Текст] / J. Stettner // PoS. — 2019. — Т. ICRC2019. — С. 1017.
11. *Fusco, L. A.* Testing cosmic ray composition models with very large volume neutrino telescopes [Текст] / L. A. Fusco, F. Versari. — 2019. — arXiv: 1912.10778 [astro-ph.HE]. — URL: <https://arxiv.org/abs/1912.10778>.
12. *Eckerová, E.* Diffuse neutrino flux measurements with the Baikal-GVD neutrino telescope [Текст] / E. Eckerová // Proceedings of 38th International Cosmic Ray Conference — PoS(ICRC2023). — Sissa Medialab, 08.2023. — С. 1015. — (ICRC2023). — URL: <http://dx.doi.org/10.22323/1.444.1015>.
13. *Naab, R.* Measurement of the astrophysical diffuse neutrino flux in a combined fit of IceCube’s high energy neutrino data [Текст] / R. Naab, E. Ganster, Z. Zhang. — 2023. — arXiv: 2308.00191 [astro-ph.HE]. — URL: <https://arxiv.org/abs/2308.00191>.
14. *Silva, M.* Measurement of the Cosmic Neutrino Flux from the Southern Sky using 10 years of IceCube Starting Track Events [Текст] / M. Silva, S. Mancina, J. Osborn. — 2023. — arXiv: 2308.04582 [astro-ph.HE]. — URL: <https://arxiv.org/abs/2308.04582>.
15. Observational Evidence for the Origin of High-energy Neutrinos in Parsec-scale Nuclei of Radio-bright Active Galaxies [Текст] / A. Plavin [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2020. — Май. — Т. 894, № 2. — С. 101. — URL: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab86bd>.
16. Growing evidence for high-energy neutrinos originating in radio blazars [Текст] / A. V. Plavin [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2023. — Май. — Т. 523, № 2. — С. 1799—1808. — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stad1467>.
17. *Bernardini, E.* AMANDA: Selected physics results [Текст] / E. Bernardini // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2006. — Т. 567, № 2. — С. 418—422. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900206010424> ; VLVnT2.

18. Multimessenger observations of a flaring blazar coincident with high-energy neutrino IceCube-170922A [Текст] / M. Aartsen [и др.] // Science. — 2018. — ИЮЛЬ. — Т. 361, № 6398. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.aat1378>.
19. Probing the Galactic Neutrino Flux at Neutrino Energies above 200 TeV with the Baikal Gigaton Volume Detector [Текст] / V. A. Allakhverdyan [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2025. — Март. — Т. 982, № 2. — С. 73. — URL: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/adb630>.
20. A tidal disruption event coincident with a high-energy neutrino [Текст] / R. Stein [и др.] // Nature Astronomy. — 2021. — Февр. — Т. 5, № 5. — С. 510—518. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41550-020-01295-8>.
21. Observation of Photons above 300 TeV Associated with a High-energy Neutrino from the Cygnus Region [Текст] / D. D. Dzhappuev [и др.] // The Astrophysical Journal Letters. — 2021. — Август. — Т. 916, № 2. — С. L22. — URL: <http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac14b2>.
22. *Kovalev, Y. Y.* Galactic Contribution to the High-energy Neutrino Flux Found in Track-like IceCube Events [Текст] / Y. Y. Kovalev, A. V. Plavin, S. V. Troitsky // The Astrophysical Journal Letters. — 2022. — Ноябрь. — Т. 940, № 2. — С. L41. — URL: <http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aca1ae>.
23. Hint for a TeV neutrino emission from the Galactic Ridge with ANTARES [Текст] / A. Albert [и др.] // Physics Letters B. — 2023. — ИЮНЬ. — Т. 841. — С. 137951. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2023.137951>.
24. Observation of high-energy neutrinos from the Galactic plane [Текст] / R. Abbasi [и др.] // Science. — 2023. — ИЮНЬ. — Т. 380, № 6652. — С. 1338—1343. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.adc9818>.
25. Search for directional associations between baikal gigaton volume detector neutrino-induced cascades and high-energy astrophysical sources [Текст] / V. A. Allakhverdyan [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2023. — Сентябрь. — Т. 526, № 1. — С. 942—951. — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stad2641>.
26. *Lepage, G. P.* Adaptive Multidimensional Integration: VEGAS Enhanced [Текст] / G. P. Lepage // Journal of Computational Physics. — 2021. — Т. 439, № 110386.

27. *Naumov, V. A.* Neutrino propagation through dense matter [Текст] / V. A. Naumov, L. Perrone // *Astroparticle Physics*. — 1999. — Март. — Т. 10, № 2/3. — С. 239–252. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0927-6505\(98\)00046-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0927-6505(98)00046-2).
28. *Allakhverdyan, V. A.* NuDISxs: A Python package for neutrino-nucleon cross-section calculations [Текст] / V. A. Allakhverdyan, D. V. Naumov, S. I. Zavyalov. — 2022. — URL: <https://pypi.org/project/nudisxs> ; Integrates Python with Fortran routines for charged and neutral current neutrino-nucleon interaction simulations.
29. LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era [Текст] / A. Buckley [и др.] // *The European Physical Journal C*. — 2015. — Март. — Т. 75, № 3. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3318-8>.
30. Array programming with NumPy [Текст] / C. R. Harris [и др.] // *Nature*. — 2020. — Т. 585. — С. 357–362.
31. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python [Текст] / P. Virtanen [и др.] // *Nature Methods*. — 2020. — Т. 17. — С. 261–272. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>.
32. *Allakhverdyan, V. A.* NuPropagator: A Python package neutrino generator for neutrino telescopes [Текст] / V. A. Allakhverdyan, D. V. Naumov. — 2022. — URL: <https://pypi.org/project/nupropagator>.
33. *Dziewonski, A. M.* Preliminary reference Earth model [Текст] / A. M. Dziewonski, D. L. Anderson // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. — 1981. — Т. 25, № 4. — С. 297–356. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031920181900467>.
34. *Kuzmin, K. S.* Fine-tuning parameters to describe the total charged-current neutrino–nucleon cross section [Текст] / K. S. Kuzmin, V. V. Lyubushkin, V. A. Naumov // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2006. — Т. 69, № 11. — С. 1857–1871.
35. *Kuzmin, K. S.* How to Sum Contributions into the Total Charged-Current Neutrino–Nucleon Cross Section [Текст] / K. S. Kuzmin, V. V. Lyubushkin, V. A. Naumov. — 2005. — arXiv: [hep-ph/0511308](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0511308) [hep-ph]. — <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0511308>.

36. *Kuzmin, K. S.* Axial masses in quasielastic neutrino scattering and single-pion neutrino production on nucleons and nuclei [Текст] / K. S. Kuzmin, V. V. Lyubushkin, V. A. Naumov. — 2006. — arXiv: hep-ph/0606184 [hep-ph]. — <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0606184>.
37. *T.S. Sinigovskaya, A. M.* High-energy neutrino fluxes and flavor ratio in the Earth's atmosphere [Текст] / A. M. T.S. Sinigovskaya, S. Sinigovsky // Phys. Rev. D. — 2015.
38. *Vincent, A. C.* High-energy neutrino attenuation in the Earth and its associated uncertainties [Текст] / A. C. Vincent, C. A. Argüelles, A. Kheirandish // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2017. — Ноябрь. — Т. 2017, № 11. — С. 012–012. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/11/012>.
39. Review of particle physics [Текст] / S. Navas [и др.] // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 110, № 3. — С. 030001.
40. New parton distributions for collider physics [Текст] / H.-L. Lai [и др.] // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 82. — С. 074024. — arXiv: 1007.2241 [hep-ph].
41. Ultrahigh-energy neutrino interactions [Текст] / R. Gandhi [и др.] // Astroparticle Physics. — 1996. — Т. 5, № 2. — С. 81–110. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0927650596000084>.

Список рисунков

1.1	Спектр космических лучей, взятый из [5]	13
1.2	Спектры астрофизических нейтрино, соответствующих разным исследованиям: (1) - HESE 2020 [8]; (2) - Каскады $\nu_e + \nu_\mu$, 2020 [9]; (3) - ν_μ , 2019 [10]; (4) - ANTARES 2019 [11]; (5) - Baikal-GVD, восходящие потоки [12]	20
2.1	Сравнение распределений L_\pm , рассчитанных с помощью Монте-Карло симуляций (гистограммы) с точным расчетом 2.30 (черные линии). Верхний, средний и нижний графики соответствуют $g = -0.9, 0, 0.9$	32
2.2	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	33
2.3	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	34
2.4	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	35
2.5	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	36
2.6	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	36
2.7	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	37
2.8	Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$	38

- 2.9 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 39
- 2.10 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 39
- 2.11 Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 40
- 2.12 Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 41
- 2.13 Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 42
- 3.1 Зависимость функции Хеньи-Гринштейна от косинуса угла рассеяния для $g = 0, 0.5, 0.98$ 47

- 3.2 Четыре примера возможных траекторий для фотона, рожденного при $t = 0$ в \mathbf{r}_0 с начальным направлением $\hat{\mathbf{s}}_0$, приводящих \mathbf{r} в момент времени t с направлением $\hat{\mathbf{s}}$: (А) Без рассеяний, при условии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + c\hat{\mathbf{s}}(t - t_0)$ и $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0$. (В) с одним рассеянием в направлении $\hat{\mathbf{s}}$ в момент времени t_1 , причем $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 + c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1)$. (С) С двумя рассеяниями. Первое произошло в момент t_1 в произвольном направлении $\hat{\mathbf{s}}_1$. Второе произошло в момент t_2 в направлении $\hat{\mathbf{s}}$, что в итоге приводит в точку $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) + c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) + c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1$. (D) С тремя рассеяниями. Первое произошло в момент времени t_1 в произвольном направлении $\hat{\mathbf{s}}_1$. Второе произошло в момент времени t_2 в произвольном направлении $\hat{\mathbf{s}}_2$. Третье произошло в момент времени t_3 в направлении $\hat{\mathbf{s}}$, что в итоге приводит в точку $\mathbf{r} = c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) + c\hat{\mathbf{s}}_2(t_3 - t_2) + c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) + c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1$ 54
- 3.3 Пример траектории фотона с начальным направлением $\hat{\mathbf{s}}_0$, начинающейся из точки $(0,0,0)$ и приходящей в точку \mathbf{r} на поверхности оптического модуля. Центр сферы находится в точке \mathbf{r}_0 , $\hat{\mathbf{n}}$ - единичная нормаль к поверхности оптического модуля в точке \mathbf{r} 58
- 3.4 Зависимость обратных длин для воды в озере Байкал для оптического диапазона длин волн. 60
- 3.5 Зависимость показателя преломления для воды в озере Байкал для оптического диапазона длин волн. 61
- 3.6 Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (МС) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0,3)$ м. 62
- 3.7 Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (МС) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0,0)$ м. 63
- 3.8 Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (МС) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0, - 3)$ м. 64

3.9	Ожидаемое число детектируемых фотонов ΔN_{hit} проинтегрированных по времени в бине шириной 1 нс, полученных интегральным методом (RTE) и методом протаскивания Монте-Карло (МС) в точке $\mathbf{r}_0 = (3,0,100)$ м.	65
3.10	Изменение формы спектра пришедших на детектор фотонов в зависимости от радиуса детектора с учетом перевзвешивания потока фотонов	68
3.11	Зависимость корреляционной функции направлений фотонов в продольном и поперечном направлениях от времени	79
3.12	Зависимость дисперсии направления фотонов от времени	80
3.13	Зависимость корреляционной функции для радиус-вектора фотонов в продольном и поперечном направлениях от времени	81
3.14	Зависимость дисперсии радиус-вектора фотонов от времени	82
4.1	Структура программного пакета <code>nudisxs</code> и его зависимости.	89
4.2	Структура программного пакета <code>NuPropagator</code> и его зависимости.	90
4.3	Плотность вещества в модели Земли PREM.	93
4.4	Зависимость дважды дифференциального сечения мюонного нейтрино на нуклоне, нормированного на энергию нейтрино при разных значениях x в зависимости от y для модели партонных распределений CT10NLO	95
4.5	Зависимость дважды дифференциального сечения мюонного нейтрино на нуклоне, нормированного на энергию нейтрино при разных значениях y в зависимости от x для модели партонных распределений CT10NLO	96
4.6	Зависимость полного сечения взаимодействия нейтрино на нуклоне от энергии для разных партонных распределений	96
4.7	Дважды дифференциальные сечения для рассеяния мюонного нейтрино на протоне за счёт заряженного тока в зависимости от переменной Бьёркена x при различных энергиях нейтрино и фиксированных значениях переменной y	97

4.8	Полные сечения взаимодействия мюонного нейтрино на нуклоне в зависимости от энергии E_ν для различных наборов партонных распределений (CT18ZNNLO, nCTEQ15, CT10nlo, TUJU19nlo). Расхождение при высоких энергиях отражает неопределённость поведения PDF при малых x	98
4.9	Сравнение полного сечения глубоконеупругого рассеяния нейтрино и антинейтрино, рассчитанного с помощью XsDis [34–36].	99
4.10	Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10$ GeV	100
4.11	Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10^3$ GeV	101
4.12	Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10^5$ GeV	102
4.13	Зависимость потоков нейтрино от косинуса угла к поверхности земли при энергии нейтрино $E_\nu = 10^8$ GeV	103
4.14	Сравнение потоков, полученных с помощью nuFATE и NuPropagator для разных углов прилета нейтрино.	104
4.15	Кинематические области в x и Q^2 , исследованные в экспериментах с неподвижной мишенью и на коллайдере [39].	106
4.16	Зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$ в зависимости от переменной Бьеркена x и переменной Q^2 для энергии нейтрино $E_\nu = 1$ TeV для модели партонных распределений CT10nlo[40].	107
4.17	Зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$ в зависимости от переменной Бьеркена x и переменной Q^2 для энергии нейтрино $E_\nu = 1$ PeV для модели партонных распределений CT10nlo[40].	108
4.18	Зависимость кумулятивного нормированного сечения $F_\sigma(x, Q^2)$ в зависимости от переменной Бьеркена x и переменной Q^2 для энергии нейтрино $E_\nu = 100$ PeV для модели партонных распределений CT10nlo[40].	109

- 4.19 Вклад взаимодействий нейтрино за счет нейтрального тока в общий поток в точке наблюдения потока в зависимости от угла прилета нейтрино относительно детектора для разных значений энергии нейтрино. Здесь z - глубина, на которой находится детектор, θ_d - угол прилета нейтрино, относительно детектора, θ_n - угол прилета нейтрино, относительно нормали к Земле, R_E - Радиус Земли. 110
- 4.20 Вероятность прохождения нейтрино сквозь Землю в зависимости от энергии и зенитного угла, измеряющегося относительно детектора. . 111
- 4.21 Изменение показателя потока нейтрино для пучка, проходящего сквозь Землю в зависимости от энергии при учете разных типов взаимодействия. 112
- 4.22 Распределение $\Delta\chi^2$, полученное на основе сравнения чисел нейтринных событий в предположении двух гипотез, где в качестве альтернативной гипотезы взята гипотеза усредненного ядра и мантии 114
- 4.23 Распределение $\Delta\chi^2$, полученное на основе сравнения чисел нейтринных событий в предположении двух гипотез, где в качестве альтернативной гипотезы взята гипотеза усредненного ядра 115
- 4.24 Распределение $\Delta\chi^2$, полученное на основе сравнения чисел нейтринных событий в предположении двух гипотез, где в качестве альтернативной гипотезы взята гипотеза линейного ядра 116
- A.1 а) Схематическое изображение лептон-нуклонного взаимодействия,
б) Кинематические области лептон-нуклонного рассеяния в зависимости от Q^2 и M_ν 138
- A.2 Плотность вероятности доли импульса нуклона, переносимая партонами 140
- A.3 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3,10,20$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 148
- A.4 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3,10,20$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 149
- A.5 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3,10,20$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 149

- А.6 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 151
- А.7 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 151
- А.8 Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 152
- А.9 Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 153
- А.10 Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 154
- А.11 Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0,2,4,6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$ 155
- А.12 Две возможных траектории для рассеяния второго порядка в приближении малых углов рассеяния 189

Список таблиц

1	Предельные случаи для функции Хеньи-Гринштейна	46
2	Время CPU, необходимое для расчетов RTE и MC (методом трассировки лучей), нормированное на общее время CPU для всех четырех порядков RTE в начальной контрольной точке. Первый порядок (аналитический) исключен из-за незначительных требований к процессору. Последующие порядки RTE и расчеты MC представлены с точностью до 1% (относительная неопределенность). Одна единица времени в данном контексте соответствует 120 секундам времени работы в системе с 4 ядрами с частотой 2223 МГц и 12 ГБ оперативной памяти.	66
3	Свойства основных четырех взаимодействий	133
4	Свойства открытых промежуточных бозонов	133
5	Свойства кварков	134
6	Свойства лептонов	134

Приложение А

Приложение

А.1 Стандартная модель

В современной физике известны четыре фундаментальных взаимодействия: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Эти взаимодействия имеют разную интенсивность (константу связи), разный радиус взаимодействия и разные переносчики самого взаимодействия. В таб. (3) можно видеть более подробно всю информацию об этих взаимодействиях. Также в таб. (4) можно видеть свойства промежуточных бозонов. Группой, лежащей в основе Стандартной модели, является $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Взаимодействие	Константа связи	Радиус	Бозон
Гравитационное	$G_N \approx 5.9 \times 10^{-39}$	∞	Гравитон(?)
Слабое	$G_F \approx 1.02 \times 10^{-5} m_p^{-2}$	$\approx m_w^{-1} \approx 10^{-3}$	W^\pm, Z^0
Электромагнитное	$\alpha \approx 1/137$	∞	γ
Сильное	$\alpha_s \approx 1$	Конфайнмент	Глюоны

Таблица 3 — Свойства основных четырех взаимодействий

Бозон	Взаимодействие	Спин	Масса, ГэВ/ c^2	Заряд
Глюоны	Сильное	1	0	0
γ	Электромагнитное	1	0	0
W^\pm	Слабое	1	80.385	± 1
Z^0	Слабое	1	91.1876	0

Таблица 4 — Свойства открытых промежуточных бозонов

А.1.1 Квантовая хромодинамика

В настоящее время принято рассматривать сильное взаимодействие как обмен глюонами между кварками. В 50-х годах в связи с постоянно растущим числом открываемых “элементарных” частиц Гелл-Манном и Цвейгом была предложена новая модель. Они сделали предположение, что все частицы построены из некоторых составляющих частиц — кварков. В этой модели барионы состоят из 3 кварков, а мезоны из пары кварк-антикварк. Эта модель хорошо прошла множественные экспериментальные проверки. Сейчас в рамках Стандартной модели фундаментальными частицами считаются 6 кварков и 6 лептонов (и их античастиц). На свойства кварков можно посмотреть в таб. (5), а на свойства лептонов в таб. (6). Например, протон в этой модели состоит из двух u-кварков и одного d-кварка, а нейтрон из одного u-кварка и двух d-кварков.

Кварк	Спин	$Q_{\text{барионный}}$	I	I_3	S	C	B	T	Q[e]	M, МэВ/ c^2
u	1/2	1/3	1/2	1/2	0	0	0	0	2/3	2.3
d	1/2	1/3	1/2	-1/2	0	0	0	0	-1/3	4.8
c	1/2	1/3	0	0	0	1	0	0	2/3	1275
s	1/2	1/3	0	0	-1	0	0	0	-1/3	95
b	1/2	1/3	0	0	0	0	-1	0	-1/3	4180
t	1/2	1/3	0	0	0	0	0	1	2/3	174340

Таблица 5 — Свойства кварков

Лептон	Q[e]	L_e	L_μ	L_τ	L	M, МэВ/ c^2
e^-	-1	1	0	0	1	0.511
ν_e	0	1	0	0	1	$< 0.12 \times 10^{-3}$
μ^-	-1	0	1	0	1	105.66
ν_μ	0	0	1	0	1	$< 0.12 \times 10^{-3}$
τ^-	-1	0	0	1	1	1776.84
ν_τ	0	0	0	1	1	$< 0.12 \times 10^{-3}$

Таблица 6 — Свойства лептонов

Однако этого оказалось недостаточно. Если еще было понятно, как существуют два и кварка в протоне, то непонятно, как в одном адроне существуют три кварка. Один из примеров такой ситуации — существование Ω^- бариона. Он состоит из трех s-кварков. Спин s-кварка равен 1/2, поэтому такое состояние запрещено в силу запрета Паули. Это вынудило ученых того времени предположить существование нового квантового числа - цвета. Гипотеза существования цвета хорошо подтверждается в экспериментах, где измеряется отношение сечений $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow hadrons)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow hadrons)}$. Это отношение пропорционально количеству цветов. Эксперимент дает значение для этой величины, близкое к 3. “Свободный” цветовой заряд никогда не наблюдался, так как кварки входят в адроны так, что все адроны являются бесцветными. С помощью шести кварков и трех цветов можно описать все известные адроны. При современных энергиях кварки считаются точечными элементарными частицами. Источником информации о распределении кварков и внутренней структуре протона и нейтрона служит глубоко неупругое рассеяние лептонов на протонах и нейтронах.

Калибровочная теория сильных взаимодействий называется квантовой хромодинамикой. Она опирается на инвариантность относительно вращений в цветовом пространстве, описываемых группой SU(3). Это значит, что кварки являются цветовыми триплетами и преобразуются согласно правилу

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}' = \hat{U}(x) \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где

$$\hat{U} = \exp(-i \sum_k \alpha_k \lambda_k / 2) \quad (\text{A.2})$$

и λ_k - матрицы Гелл-Манна. Они имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характерными чертами КХД являются асимптотическая свобода и конфайнмент. Здесь, в силу цветового заряда, сила притяжения между двумя кварками растёт с увеличением расстояния между ними. Когда расстояние между ними маленькое, кварки становятся свободными. Невозможно отделить кварки друг от друга. Затрачиваемая для этого энергия идет на образование кварк-антикварковых пар.

А.1.2 Электрослабое взаимодействие

При низких энергиях слабое взаимодействие можно описать с помощью четырехфермионной модели взаимодействия Ферми. Примером распада, который хорошо описывается этой моделью, является бета-распад нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Гамильтониан этого взаимодействия имеет вид

$$H = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_H^\mu j_{L\mu}, \quad (\text{A.4})$$

где j_H^μ - адронный ток, $j_{L\mu}$ - лептонный ток. Считая, что слабые токи имеют V-A структуру (V-векторный ток, A- аксиальный ток), можно записать эти токи в виде:

$$\begin{aligned} j_H^\mu &= \bar{p} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) n, \\ j_{L\mu} &= \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

т.е. в слабом взаимодействии участвуют только левые токи. Однако у четырехфермионного взаимодействия Ферми есть проблемы. Например, оно неперенормируемо. Также оно дает неправильные результаты для высоких энергий, близких к массам M_W . Впервые описание высоких энергий было дано Глэшоу, Вайнбергом и Саламом, которые объединили слабое и электромагнитное взаимодействие. В качестве калибровочной группы здесь выступает группа $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Здесь левые частицы образуют дублеты, а правые частицы образуют синглеты:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L, \\ u_R, d_R, s_R, c_R, b_R, t_R, e_R, \mu_R, \tau_R.$$

Здесь d' , s' и b' являются смешанными состояниями Кабиббо. Локальная инвариантность приводит к появлению четырех калибровочных бозонов. В итоге лагранжиан записывается в следующем виде:

$$L = \frac{g}{\sqrt{2}}(j^{-\mu}W_{\mu}^{+} + j^{+\mu}W_{\mu}^{-}) + \frac{g}{\cos \theta_W}(j_{\mu}^3 - \sin^2 \theta_W j_{\mu}^{em})Z^{\mu} + g \sin \theta_W j_{\mu}^{em} A^{\mu} \quad (\text{A.6})$$

Здесь первое слагаемое описывает заряженные токи, второе — нейтральный ток, а последнее — электромагнитный. Величина θ_W носит название угла Вайнберга. Она дает связь между слабым зарядом и электромагнитным зарядом:

$$\sin \theta_W = \frac{e}{g} \quad (\text{A.7})$$

На этой стадии все частицы безмассовые. Фермионы и бозоны приобретают массу за счет механизма Хиггса, основанного на спонтанном нарушении симметрии. Если сравнивать при низких энергиях теорию Глэшоу, Вайнберга, Салама (ГВС-теория) с теорией Ферми, то можно получить связь между их константами связи:

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (\text{A.8})$$

A.1.3 Взаимодействие нейтрино с нуклоном

Рассмотрим рассеяние лептона на нуклоне. Схематическое изображение этого процесса можно видеть на рис.(A.1). Для описания процесса обычно используются следующие кинематические переменные в лабораторной системе отсчета. Здесь $k = (E, \mathbf{k})$ - 4-импульс начального лептона, $k' = (E', \mathbf{k}')$ - 4-импульс конечного лептона, P и M - 4-импульс и масса начального нуклона, P' - 4-импульс конечной адронной системы, $q = k - k' = P' - P$. $L_{\mu\nu}$ и $W_{\mu\nu}$ - лептонный и адронный тензоры взаимодействия. Однако намного удобнее пользоваться переменными, которые не изменяются от перехода из одной системы отсчета в другую, поэтому обычно используют следующие инвариантные переменные:

1. $\nu = qP/M = E' - E$ - это часть энергии начального лептона, переданная нуклону (в системе покоя нуклона);

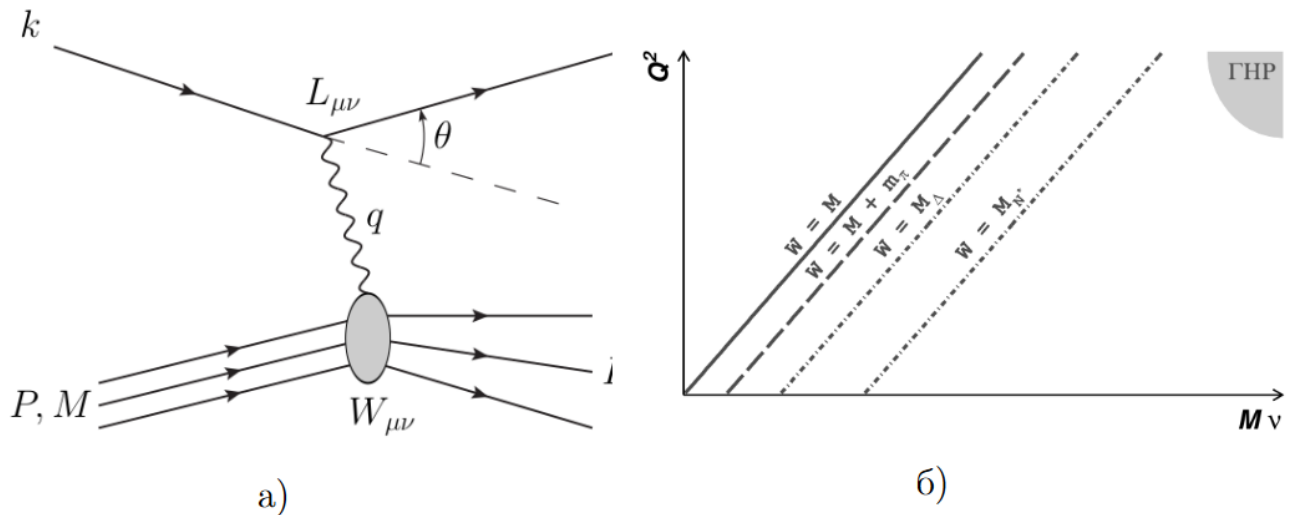


Рисунок А.1 — а) Схематическое изображение лептон-нуклонного взаимодействия, б) Кинематические области лептон-нуклонного рассеяния в зависимости от Q^2 и $M\nu$

2. $Q^2 = -q^2 = 2(E E' - \mathbf{k} \mathbf{k}') - m_l^2 - m_l'^2$ - квадрат переданного 4-импульса лептона нуклону;
3. $W^2 = (q + P)^2 = M^2 + 2M\nu - q^2$ - квадрат массы адронной системы;
4. $s = (k + P)^2$ - квадрат энергии в системе центра масс.

На рис. А.1(б) можно видеть различные кинематические области для лептон-нуклонного рассеяния. Прямая $W = M$ ответственна за (квази)упругое рассеяния (т.е. конечное состояние является также нуклоном). Левее неё лежит область, кинематически недостижимая. Правее лежит прямая, изображающая порог неупругих реакций (характеризующихся появлением легчайшего адрона) $W = M + m_\pi$. Штрихованные прямые отвечают рождению различных резонансов (запрещена законами сохранения).

Партоновая модель

В 1967 году в Стенфорде в экспериментах по глубоко неупругому электророждению было обнаружено, что при больших Q^2 сечение не зависит от Q^2 и ν , а зависит только от безразмерных величин $x = Q^2/2M\nu$ и $y = \nu/E$. Это означало, что большой импульс передается некоторым точечным частицам внутри нуклона. Фейнман назвал эти точечные частицы партонами. Сейчас мы знаем,

что на самом деле партоны — это кварки и глюоны. Сам нуклон существует в виде трех постоянных кварков (их называют валентными), однако в силу соотношений неопределенности Бора, в нуклоне могут на короткое время рождаться пары кварк-антикварк (их называют морские кварки). Также, в силу цветового взаимодействия, в нуклоне есть глюоны. Налетающий лептон может провзаимодействовать на одной из этих составляющих нуклона при соответствующих энергиях (при малых энергиях длина волны лептона будет такова, что он не почувствует составляющих нуклона и провзаимодействует с ним как с целым).

Рассмотрим столкновение лептона с быстро движущимся нуклоном ($|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$). В этом случае можно пренебречь поперечным импульсом. Обозначим за x — долю импульса нуклона (\mathbf{p} - 4-импульс нуклона), которую переносит партон внутри нуклона. Тогда, переходя на уровень ниже, рассмотрим лептон-партонное рассеяние. Квадрат полной энергии в системе центра масс (СЦМ) имеет вид:

$$s = (xp + k)^2 = x^2p^2 + 2xpk + k^2 = x^2M^2 + 2xpk + m_l^2. \quad (\text{A.9})$$

Учитывая, что

$$\hat{s} = (k + p)^2 = k^2 + 2kp + p^2 = m_l^2 + M^2 + 2kp, \quad (\text{A.10})$$

имеем следующую связь:

$$\hat{s} = xs + M^2x(x - 1) + m_l^2(1 - x) \approx xs. \quad (\text{A.11})$$

В результате рассеяния импульс партона теперь равен $q + px$. Пренебрегая массой партона, можно записать

$$\begin{aligned} (xp + q)^2 &= x^2p^2 + 2xpq + q^2 = x^2M^2 + 2xpq + q^2 = 0 \\ x &= \frac{-pq + \sqrt{(pq)^2 - M^2q^2}}{M^2} \approx \frac{-q^2}{2qp} = \frac{Q^2}{2M\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Теперь разберемся, каким образом упругое лептон-партонное рассеяние приводит к неупругому лептон-нуклонному рассеянию. Лептон рассеивается на кварке и в конечном состоянии у нас снова кварк. Но в силу конфайнмента наш рассеянный кварк начинает рождать новые кварк-антикварковые пары. Эти кварки формируют адроны. Таким образом, рождается адронная струя, вылетающая в направлении импульса вылетевшего кварка.

Чтобы попытаться написать сечение неупругого взаимодействия, нам нужны распределения партонов в самом нуклоне. Обычно их обозначают

$f(x)$, подразумевая, что они носят смысл плотности вероятности числа кварков аромата f , имеющих долю импульса в интервале от x до $x + dx$. Тогда $xf(x)$ -плотность вероятности доли импульса нуклона, переносимая партонами аромата f с долей импульса в интервале от x до $x + dx$. Из изотопической симметрии следуют следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} f_u^p(x) = f_d^n(x) = u(x), f_d^p(x) = f_u^n(x) = d(x), f_s^p(x) = f_s^n(x) = s(x) \\ f_{\bar{u}}^p(x) = f_{\bar{d}}^n(x) = \bar{u}(x), f_{\bar{d}}^p(x) = f_{\bar{u}}^n(x) = \bar{d}(x), f_{\bar{s}}^p(x) = f_{\bar{s}}^n(x) = \bar{s}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

На рис. можно видеть распределения $xf(x)$ взятых из [21].

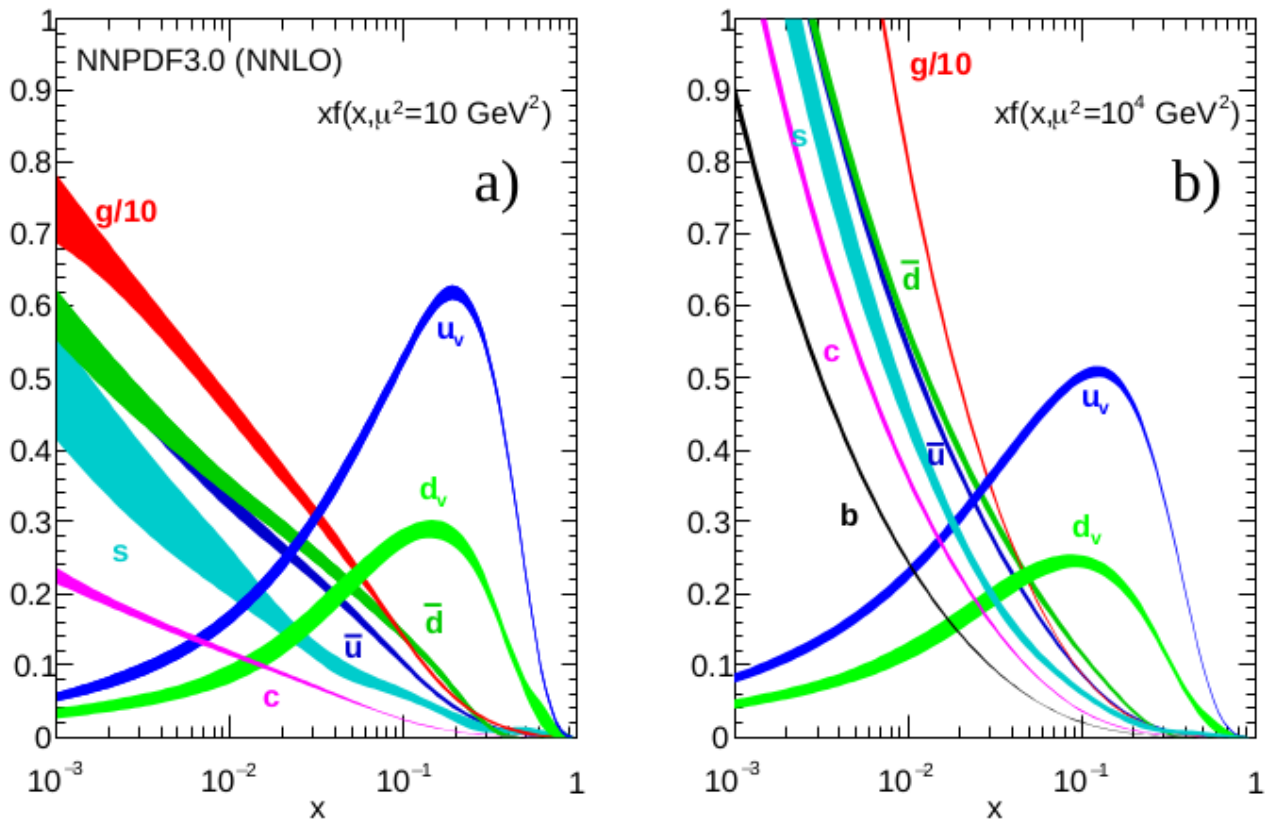


Рисунок А.2 — Плотность вероятности доли импульса нуклона, переносимая партонами

Сечения глубоко неупругого рассеяния

Дифференциальное сечение глубоко неупругого рассеяния можно записать в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi y \alpha^2}{Q^4} \sum_j \eta_j L_j^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^j, \quad (\text{A.14})$$

где сумма берется по всем возможным промежуточным бозонам, η_j - множители, зависящие от промежуточного бозона (например, для фотона он равен 1), а лептонный и адронный тензоры даются выражениями:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}(k, k') &= 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - (kk')g_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha k'^\beta) \\ H_{\mu\nu}(q, P) &= (-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) F_1(x, Q^2) + \frac{P_\mu P_\nu}{q^2} F_2(x, Q^2) \\ &\quad - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha P^\beta}{2Pq} F_3(x, Q^2), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

где $F_i(x, Q^2)$ — это функции, содержащие информацию о структуре неполяризованного адрона. В итоге, переписывая сечения через структурные функции, можно записать выражения для заряженного и нейтрального тока.

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi y \alpha^2}{Q^4} \eta_i \left((1 - y - x^2 y^2 M^2/Q^2) F_2^i + y^2 x F_1^i y (1 - 0.5y) x F_3^i \right) \quad (\text{A.16})$$

где $i = NC, CC$, а минус и плюс соответствуют нейтрино и антинейтрино в начальном состоянии соответственно.

А.1.4 Взаимодействие нейтрино с электроном

Так как сечение взаимодействия нейтрино с электроном много меньше нуклонов, то в дальнейшем будет учитываться только резонанс Глешоу ($\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow W^+$). Для расчета взаимодействия нейтрино с электроном используются

следующие формулы для дифференциальных сечений, взятые из работы [41]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_e e)}{dy} &= \frac{G_F^2 m E_\nu}{2\pi} \left[\frac{R_e^2}{\left(1 + \frac{2mE_\nu y}{M_Z^2}\right)^2} \right] \\
&+ \frac{G_F^2 m E_\nu}{2\pi} \left[\left| \frac{L_e}{1 + \frac{2mE_\nu y}{M_Z^2}} + \frac{2}{1 - \frac{2mE_\nu y}{M_Z^2} + i\frac{F_w}{M_w}} \right|^2 (1-y)^2 \right], \\
\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu)}{dy} &= \frac{G_F^2 m E_\nu}{2\pi} \frac{4(1-y)^2 [1 - (\mu^2 - m^2)/2mE_\nu]^2}{(1 - 2mE_\nu/M_W^2)^2 + \Gamma_W^2/M_W^2}, \\
\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow \text{hadrons})}{dy} &= \frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu)}{dy} \frac{\Gamma(W \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma(W \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu)},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

A.2 Пространственные моменты в одномерной задаче рассеяния

Определим моменты с помощью следующей формулы:

$$\langle x^n(l) \rangle_s = \frac{1}{N(l)} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n L(l, x, s), \tag{A.18}$$

где $s = \pm 1$, а $L(l, x, s)$ описывается (2.30). Напомним, что $N(l)$ — нормировочный множитель, который определяется как:

$$N(l) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (L(l, x, +1) + L(l, x, -1)). \tag{A.19}$$

Для дальнейших вычислений нужно посчитать три интеграла. Первый интеграл имеет вид:

$$I_{n,m} = \int_0^l dx x^n (l^2 - x^2)^m \tag{A.20}$$

Сделаем замену $t = x^2/l^2$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{l^{2m+n+1}}{2} \int_0^1 dt \cdot t^{(n-1)/2} (1-t)^m \\ &= \frac{l^{2m+n+1}}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, m+1\right) = \frac{l^{2m+n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) m!}{2\Gamma(m+1 + (n+1)/2)} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Второй интеграл, который понадобится в дальнейшем, имеет следующий вид:

$$J_n = \int_{-l}^l dx x^n I_0(\mu'_s \tau/2). \quad (\text{A.22})$$

Заметим, что при $n = 2k + 1$ интеграл обращается в 0. Остается рассмотреть только случай $n = 2k$:

$$J_n = \int_{-l}^l dx x^{2k} I_0(\mu'_s \tau/2) = 2 \int_0^l dx x^{2k} I_0(\mu'_s \tau/2). \quad (\text{A.23})$$

Разложим модифицированную функцию Бесселя в ряд:

$$\begin{aligned} J_{2k} &= 2 \int_0^l dx x^{2k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s \tau)^{2m}}{4^{2m} (m!)^2} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s)^{2m}}{4^{2m} (m!)^2} \int_0^l dx x^{2k} \tau^{2m} \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s)^{2m}}{4^{2m} (m!)^2} I_{2k,m} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s)^{2m}}{4^{2m} (m!)^2} \frac{l^{2m+n+1} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) m!}{2\Gamma(m+1 + (2k+1)/2)} \\ &= l^{2k+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s l)^{2m}}{4^{2m} m!} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(m+1+k+1/2)} = l^{2k+1} \Gamma(k+1/2) \frac{I_{k+1/2}(\gamma)}{(\gamma/2)^{k+1/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Теперь рассмотрим третий интеграл:

$$R_n = \int_{-l}^l dx x^n \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} I_1(\mu'_s \tau/2). \quad (\text{A.25})$$

Его можно преобразовать к виду:

$$R_n = \int_{-l}^l dx x^n \frac{l+x}{\tau} I_1(\mu'_s \tau/2). \quad (\text{A.26})$$

Здесь аналогичным способом можно получить, что:

$$R_{2k+1} = \frac{I_{k-1/2}(\gamma)}{(\gamma/2)^{k+1/2}} l^{2k+1} \Gamma(k+1/2) - \frac{2l^{2k+1}}{\gamma}, \quad (\text{A.27})$$

$$R_{2k+1} = \frac{I_{k+3/2}(\gamma)}{(\gamma/2)^{k+1/2}} l^{2k+2} \Gamma(k+3/2) - \frac{2l^{2k+2}}{\gamma}. \quad (\text{A.28})$$

Учитывая эти формулы, можно получить следующее выражение:

$$A_-^{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} L_- = e^{-\mu_a l - \gamma} l^{2k} \Gamma(k+1/2) \frac{I_{k+1/2}(\gamma)}{(\gamma/2)^{k-1/2}}, \quad (\text{A.29})$$

$$A_-^{2k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k+1} L_- = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$A_+^{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} L_+ = e^{-\mu_a l - \gamma} l^{2k} \Gamma(k+1/2) \frac{I_{k-1/2}(\gamma)}{(\gamma/2)^{k-1/2}}, \quad (\text{A.31})$$

$$A_+^{2k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k+1} L_+ = e^{-\mu_a l - \gamma} l^{2k+1} \Gamma(k+3/2) \frac{I_{k+1/2}(\gamma)}{(\gamma/2)^{k+1/2}}. \quad (\text{A.32})$$

Чтобы получить формулы для средних, остается посчитать нормировку:

$$\begin{aligned} N(l) &= A_+^0 + A_-^0 = \frac{2}{\gamma} e^{-\mu_a l - \gamma} \Gamma(1/2) (I_{-1/2}(\gamma) + I_{+1/2}(\gamma)) \\ &= \frac{2}{\gamma} e^{-\mu_a l - \gamma} \sqrt{\pi} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \cosh \gamma + \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \sinh \gamma \right) = e^{-\mu_a l}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Здесь мы учли следующие формулы:

$$I_{-1/2}(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \cosh \gamma, \quad (\text{A.34})$$

$$I_{1/2}(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \sinh \gamma. \quad (\text{A.35})$$

A.3 Различные разложения решения одномерного уравнения

При рассмотрении графиков (рис. 2.2 - рис. 2.4) возникает вопрос: Как, зная точное аналитическое решение, можно получить разложение Монте-Карло? Ответ на этот вопрос можно получить, если задуматься о сути метода

Монте-Карло. Ради удобства, проведем весь дальнейший анализ и все сравнение для функции L_+ . Для L_- анализ абсолютно идентичен, поэтому не будем заострять свое внимание на нем.

Рассмотрим уравнение (2.1). Если попытаться записать решение в виде ряда по количеству рассеяний, то это был бы ряд по параметру μ_s с некоторым множителем за суммой. Каким должен быть этот множитель для стандартной схемы Монте-Карло? Во-первых, за суммой должен находиться множитель, связанные с поглощением, т.е. $e^{-\mu_a l}$. Он одинаковый для произвольного числа рассеяний, поэтому его можно вынести за сумму. Далее, на каждом шаге фотон распространяется со случайной длиной, которая имеет экспоненциальную плотность распределения, пропорциональную $e^{-\mu_s l}$. Поэтому соответствующая плотность, одинаковая для всех рассеяний, также вынесется за сумму. Таким образом приходим к тому, что процедура Монте-Карло соответствует следующему разложению:

$$L_{\pm}(l, x) = e^{-(\mu_a + \mu_s)l} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_s^n L_{\pm}^{(n)}(l, x), \quad (\text{A.36})$$

где $L_{\pm}^{(n)}(l, x)$ соответствует потоку фотонов после n событий рассеяния. Получим такое же разложение исходя из аналитического решения. Посмотрим пример такого разложения для $L_+(x, l)$. Для этого перепишем аналитическое решение для $L_+(x, l)$ в следующем виде:

$$L(l, x, +1) = e^{-(\mu_a + \mu_s)l} \times e^{\mu_s(1+g)l/2} \times \left(\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu_s(1-g)}{8} I_1(\mu_s(1-g)\tau/4) \right). \quad (\text{A.37})$$

Чтобы привести это выражение к виду (2.48), все, кроме первой экспоненты, разложим по параметру μ_s . Итак, рассматривая случай $g \neq -1$, имеем:

$$L(l, x, +1) = e^{-(\mu_a + \mu_s)l} \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_s l)^k (1+g)^k}{2^k k!} \right) \times (\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu_s(1-g)}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_s)^{2n+1} (1-g)^{2n+1} \tau^{2n+1}}{8^{2n+1} k! (n+1)!}). \quad (\text{A.38})$$

Здесь мы учли, что модифицированные функции Бесселя определяются следующим образом:

$$I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}. \quad (\text{A.39})$$

Суммы по константам рассеяния в данное разложении возникают в двух местах. Первое место — дельта функция. Соответствующая сумма имеет следующий вид:

$$L(l, x, +1) = e^{-(\mu_a + \mu_s)l} \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_s l)^k (1+g)^k}{2^k k!} \delta(l-x) \right). \quad (\text{A.40})$$

Эта часть дает вклад только от прямого света, то есть света, который приходит без рассеяния. Теперь рассмотрим второе слагаемое:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_s l)^k (1+g)^k}{2^k k!} \right) \times \left(\tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu_s (1-g)}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_s)^{2n+1} (1-g)^{2n+1} \tau^{2n+1}}{8^{2n+1} n! (n+1)!} \right). \quad (\text{A.41})$$

Перепишем последнюю сумму в следующем виде:

$$\left(\tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu_s (1-g)}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_s)^{2n+1} (1-g)^{2n+1} \tau^{2n+1}}{8^{2n+1} n! (n+1)!} \right) = \left(\tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_s^{2n+2} l^{2n+1} (1-g)^{2n+2} \tau^{2n+1}}{8^{2n+2} n! (n+1)!} \right). \quad (\text{A.42})$$

Теперь распишем двойную сумму:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_s l)^k (1+g)^k}{2^k k!} \right) \times \left(\tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_s^{2n+2} (1-g)^{2n+2} \tau^{2n+1}}{8^{2n+2} n! (n+1)!} \right) = \\ & \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_s^{2n+k+2} \frac{(1+g)^k l^k (1-g)^{2n+2} \tau^{2n+1}}{2^{2n+2+k} k! 2^{2n+2} n! (n+1)!} \right) = \\ & \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \mu_s^{t+k+2} \frac{(1+g)^k l^k (1-g)^{t+2} \tau^{t+1}}{2^{t+2+k} k! 2^{t+2} (t/2)! (t/2+1)!} [t - \text{четное}] \right). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Здесь в последней строке использованы скобки Айверсона:

$$[A] = \begin{cases} 1, & A - \text{истинно} \\ 0, & A - \text{ложно} \end{cases}$$

Теперь учтем, что суммировать двойную сумму можно разными способами. Проведем суммирование по диагонали:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)g(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k), \quad (\text{A.44})$$

что достигается простой заменой переменной суммирования ($k \rightarrow k, n \rightarrow n+k$).

Теперь можно переписать суммы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \mu_s^{t+k+2} \frac{(1+g)^k l^k}{2^{t+2+k} k!} \frac{(1-g)^{t+2} \tau^{t+1}}{2^{t+2} (t/2)! (t/2+1)!} [t - \text{четное}] \right) = \\
& \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \mu_s^{k+2} \frac{((1+g)l)^{k-n}}{2^{k+2} (k-n)!} \frac{(1-g)^{n+2} \tau^{n+1}}{2^{n+2} (n/2)! (n/2+1)!} [n - \text{четное}] \right) = \\
& \frac{\tilde{\theta}(\tau^2)}{l-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_s(1+g)l)^{k+2}}{2^{k+2}} \sum_{n=0}^k \frac{z^{n+2}}{(k-n)! (n/2)! (n/2+1)!} [n - \text{четное}] \right) = \\
& \frac{\tilde{\theta}(\tau^2)}{l-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_s(1+g)l)^{k+2}}{2^{k+2}} F_k(z) \right),
\end{aligned} \tag{A.45}$$

где мы ввели обозначения:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(1-g)\tau}{2(1+g)l} = \frac{(1-g)}{2(1+g)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}, \\
F_n(z) &= \sum_{n=0}^k \frac{z^{n+2}}{(k-n)! (n/2)! (n/2+1)!} [n - \text{четное}].
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Преобразуем эти функциональные коэффициенты. Для этого сделаем замену в переменной суммирования: $n = 2s$. Тогда скобка Айверсона всегда будет давать 1 и ее можно заменить на 1. При этом сумма преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_n(z) &= \sum_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{z^{2s+2}}{(k-2s)! (s)! (s+1)!} = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{z^{2s+2}}{(s)! (s+1)!} C_k^{2s} (2s)! \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{z^{2s+2}}{(s+1)!} C_k^{2s} C_{2s}^s s! = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{z^{2s+2}}{(s+1)!} C_k^{2s} C_{2s}^s
\end{aligned} \tag{A.47}$$

В последней строке возникает явное выражение для гипергеометрической функции. Таким образом мы получаем следующее соотношение:

$$F_n(z) = F_1(a, b, 2, 4z^2). \tag{A.48}$$

Здесь для четного n :

$$a = \frac{3-n}{2}, \quad b = -\frac{n-2}{2}, \tag{A.49}$$

а для нечетного n :

$$a = -\frac{n-2}{2}, \quad b = \frac{3-n}{2}. \tag{A.50}$$

Объединяя два слагаемых в изначальном разложении, приходим к следующему выражению (при $g \neq -1$):

$$\begin{aligned}
 L_+^{(0)} &= \delta(l - x), \\
 L_+^{(1)} &= \frac{(1 + g)l}{2} \delta(l - x), \\
 L_+^{(n)} &= \frac{l^n (1 + g)^n}{2^n n!} \delta(l - x) + \tilde{\theta}(\tau^2)(l + x) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{4} (1 - g)^2 l^{n-2} (1 + g)^{n-2} \frac{F_1(a, b; 2; 4z^2)}{2^{n-2} (n - 2)!}.
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

Можно увидеть, сравнивая порядки по этим формулам, с порядками схемы Монте-Карло, как хорошо совпадает данное разложение с оценкой Монте-Карло. Для сравнения возьмем $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9, 0, 0.9$. Можно заметить, что для полученного аналитического решения есть более

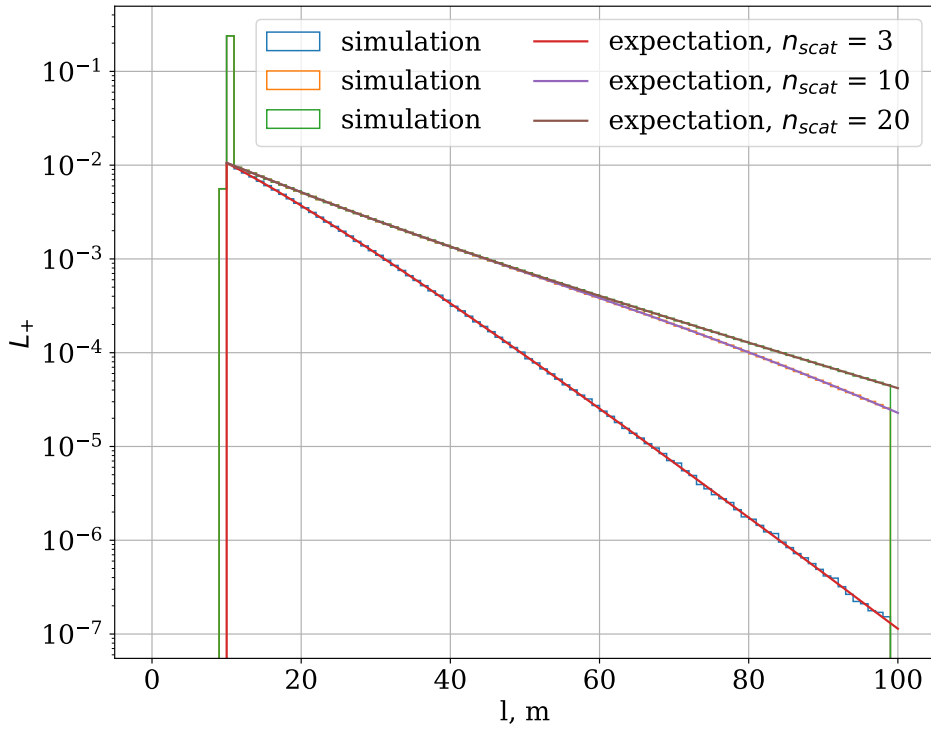


Рисунок А.3 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

естественное разложение. Оно имеет следующий вид:

$$L_{\pm}(l, x) = e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu'_s}{2} \right)^n \tilde{L}_{\pm}^{(n)}(l, x). \tag{A.52}$$

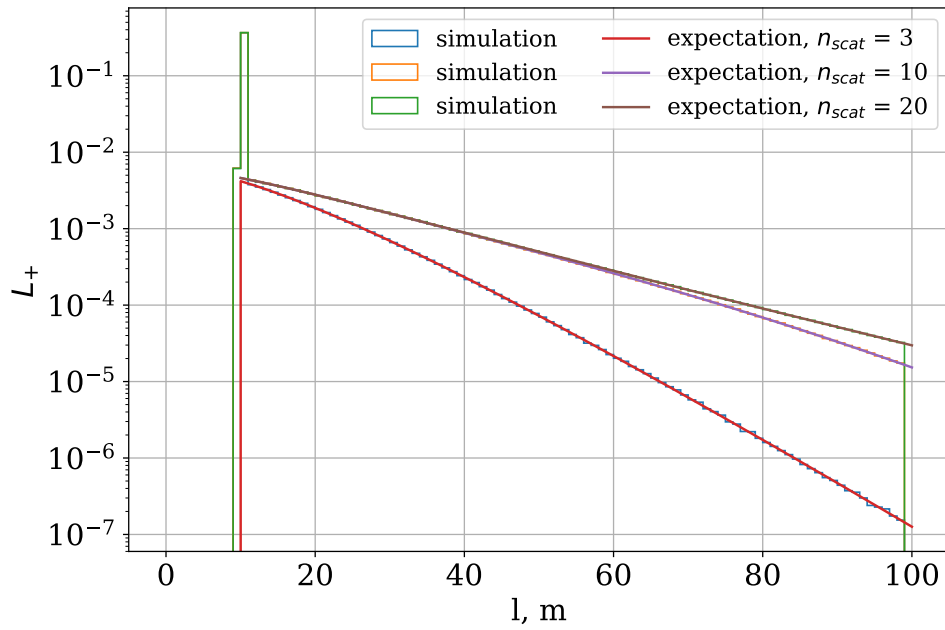


Рисунок А.4 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

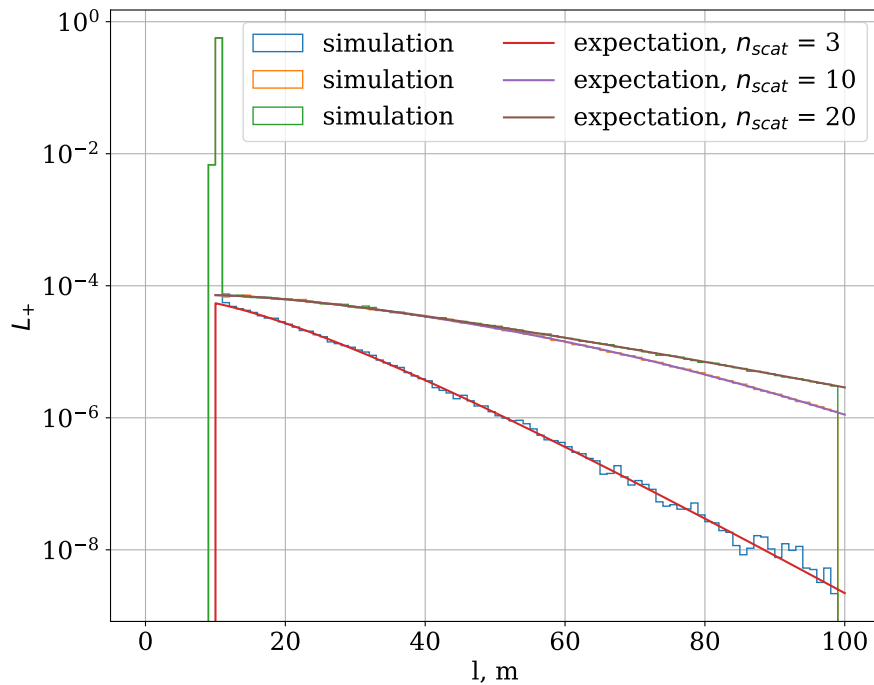


Рисунок А.5 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 3, 10, 20$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

Действительно, чтобы получить его, нужно разложить модифицированную функцию Бесселя в аналитическом решении:

$$\begin{aligned} L(x, l, +1) &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \times \left(\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu'_s}{4} I_1(\mu'_s \tau/2) \right) \\ &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \times \left(\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\mu'_s}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s \tau/4)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} L(x, l, +1) &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \times \left(\delta(l-x) + \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s/4)^{2n+2} \tau^{2n+1}}{n!(n+1)!} \right) \\ &= e^{-(\mu_a + \mu'_s/2)l} \times \left(\delta(l-x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu'_s/4)^{2n+2} \tau^{2n+1}}{n!(n+1)!} \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Таким образом получаем:

$$L_+^{(n)}(x, l) = \begin{cases} \delta(l-x), & n = 0 \\ 0, & n \text{ is odd} \\ \tilde{\theta}(\tau^2) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \frac{\tau^{n-1}}{(n/2-1)!(n/2)!}, & n \text{ is even} \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

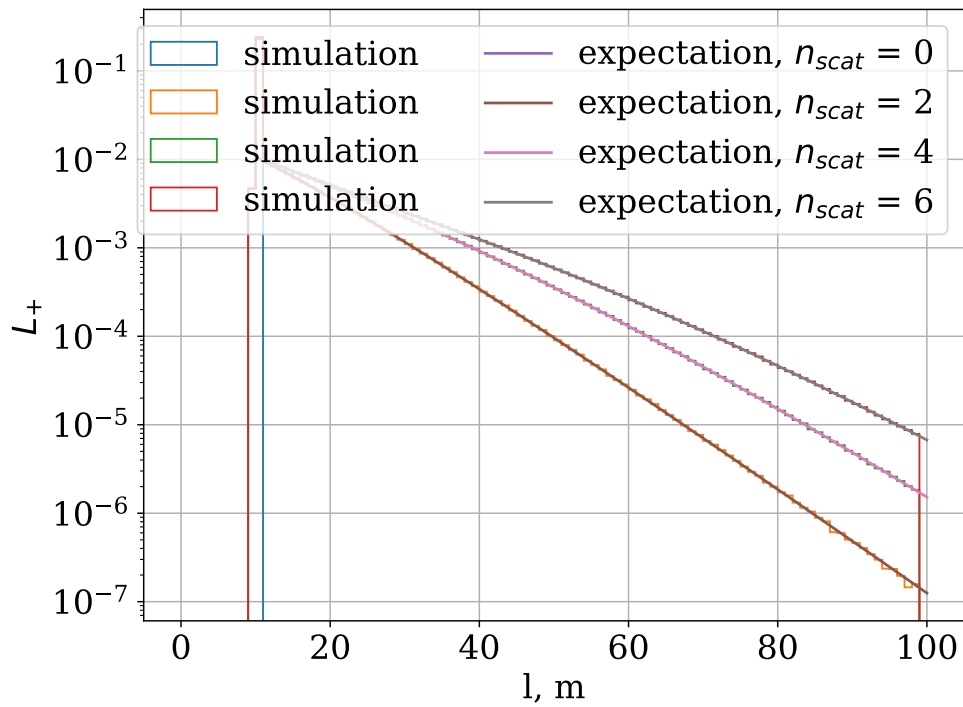


Рисунок А.6 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = -0.9$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

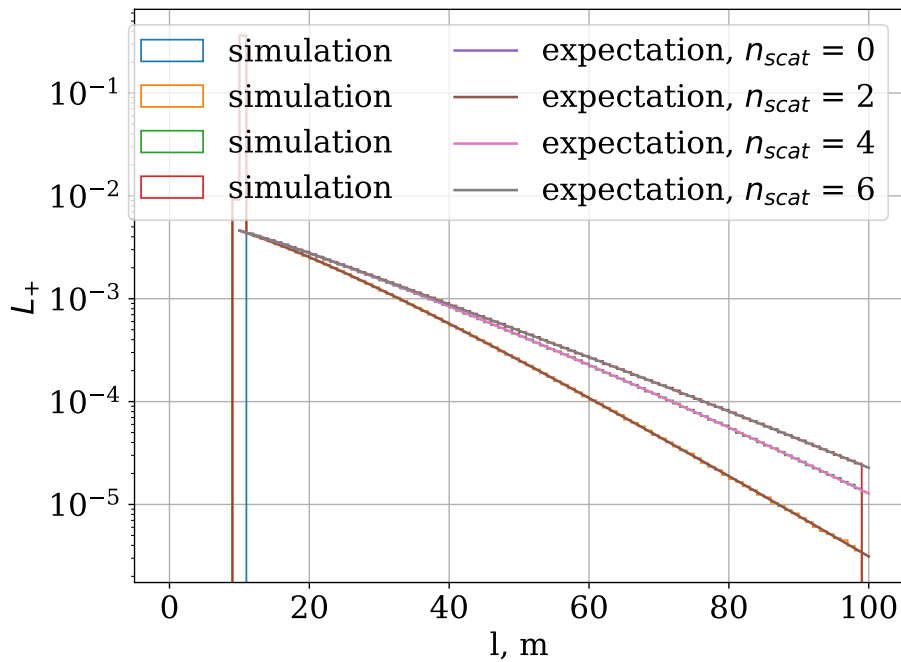


Рисунок А.7 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05m^{-1}$, $\mu_s = 0.1m^{-1}$ и $x = 10m$.

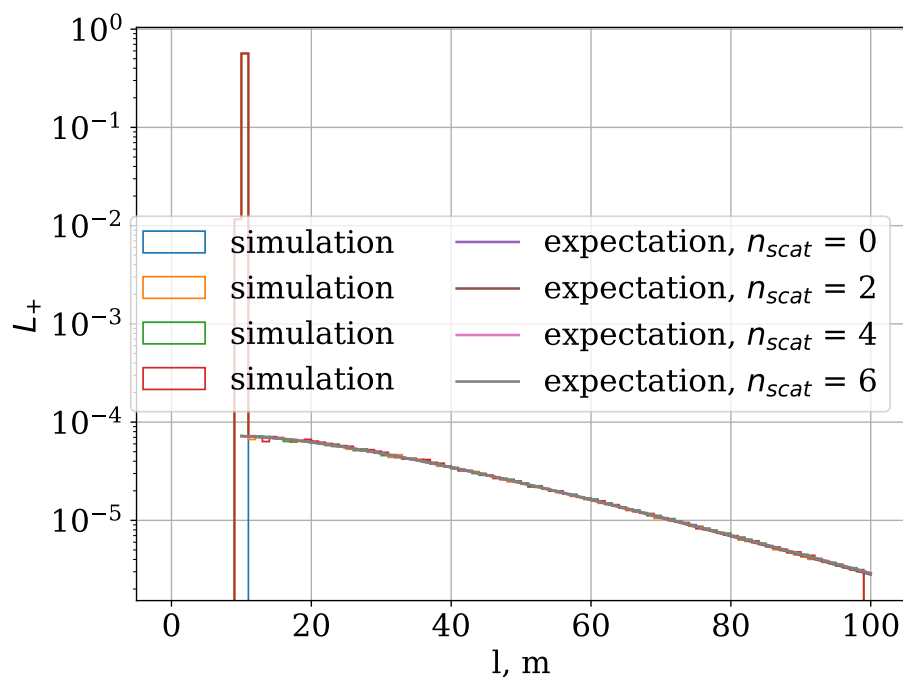


Рисунок А.8 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с оценкой ускоренного Монте-Карло (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{scat} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

А.4 Улучшенный метод МК

Разложение (A.54) подсказывает, что можно улучшить сходимость ряда Монте-Карло, так как ряд (A.53) сходится намного быстрее (A.38). Для этого надо сделать замену $\mu_s \rightarrow \mu'_s/2$. Как при этом нужно изменить g ? Из разложения (A.53) видно, что амплитуды разложения не зависят от g . Значит, g одинаково для всех μ_s . Более того, если в формуле (2.1) положить $g = -1$ и попробовать сделать разложение вида (A.38), то получится разложение вида (A.53).

Таким образом приходим к выводу, что метод Монте-Карло для одномерной задачи переноса с более быстрой сходимостью получается заменой $(\mu_s, g) \rightarrow (\mu'_s, -1)$. Более быструю сходимость ускоренного метода Монте-Карло и соответствие ускоренной схемы формулам (A.55) можно увидеть на (рис. A.6 - рис. A.11).

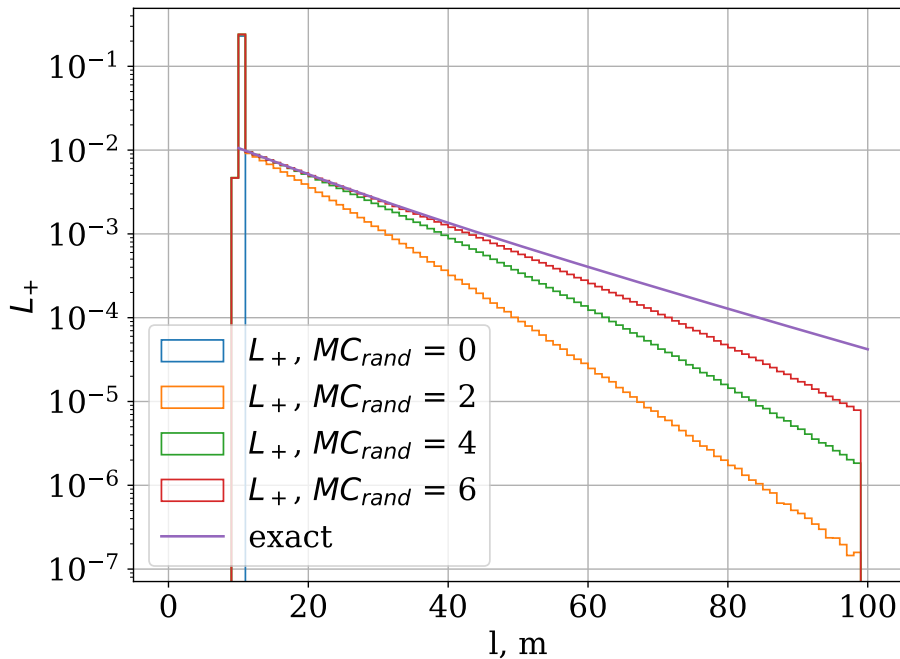


Рисунок А.9 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

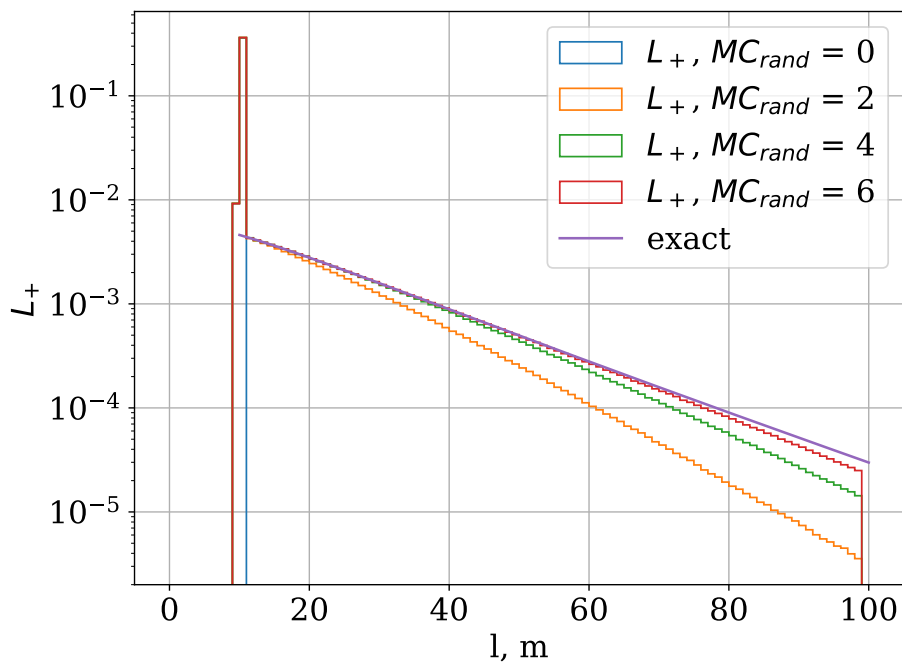


Рисунок А.10 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0$, $\mu_a = 0.05\text{m}^{-1}$, $\mu_s = 0.1\text{m}^{-1}$ и $x = 10\text{m}$.

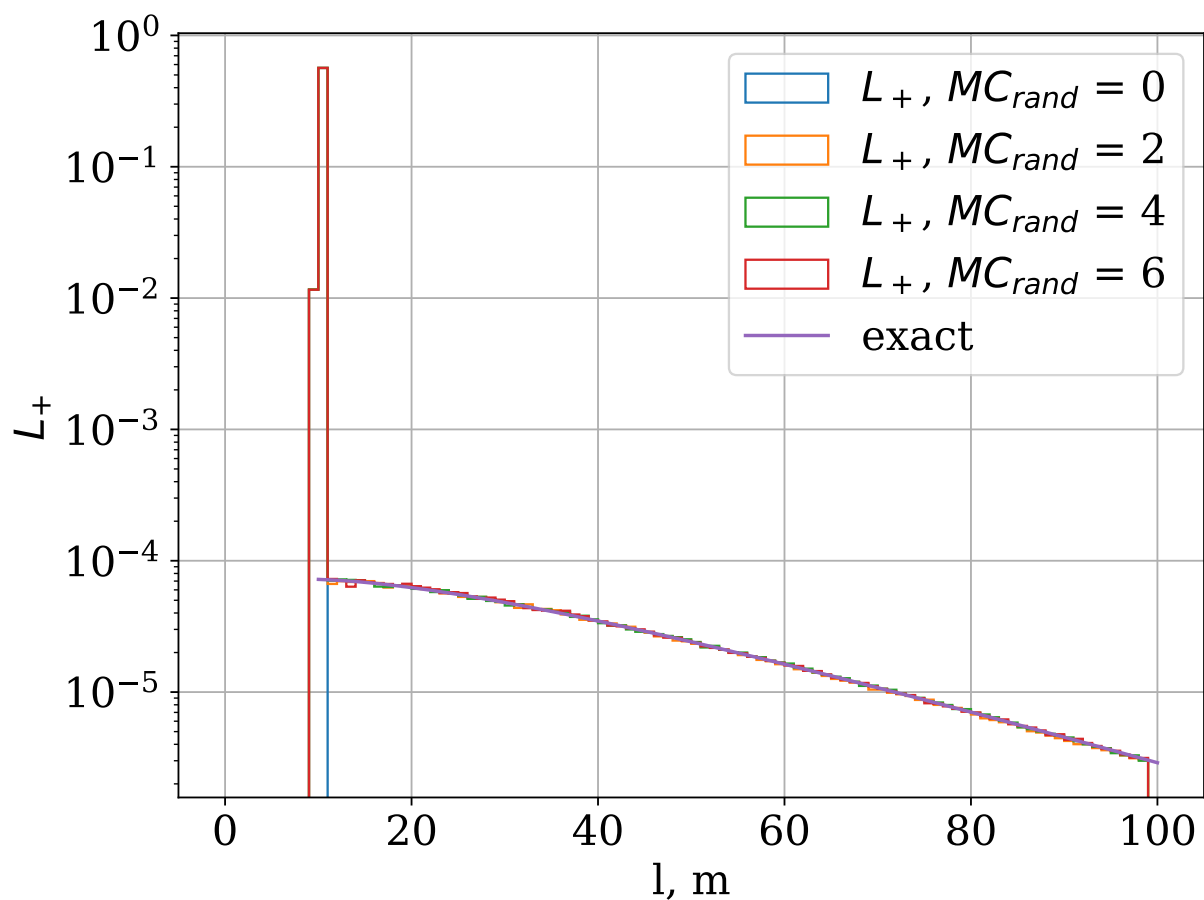


Рисунок А.11 — Сравнение точного решения L_+ (линия) с потоками Монте-Карло, с вкладом определенных порядков рассеяния (гистограмма) с параметрами $N_\gamma = 10^7$ и $n_{\text{scat}} = 0, 2, 4, 6$, предполагая $g = 0.9$, $\mu_a = 0.05 m^{-1}$, $\mu_s = 0.1 m^{-1}$ и $x = 10 m$.

А.5 Вывод выражения для якобиана перехода

Формула (3.22) неудобна для численного расчета, так как в ней присутствуют зацепляющиеся пределы интегрирования. Получим формулу, где интегралы будут иметь постоянные пределы. Для этого t_k мы заменим на безразмерные параметры $\xi_k = 1 - \frac{t_k}{t_{k+1}}$. Тогда в (3.22) от этой замены возникнет дополнительный множитель, связанный с якобианом перехода:

$$dt_1 \dots dt_n = J_n d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (\text{A.56})$$

где, J_n - это определитель матрицы Якоби:

$$J_n = \frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}. \quad (\text{A.57})$$

Посчитаем матрицу Якоби для такой замены координат. На самом деле будет удобнее посчитать обратную к ней, а потом уже выразить через нее якобиан. Итак, $J_n^{-1} = \det \frac{\partial \xi_j}{\partial t_k}$, где

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t_k} = -\frac{1}{t_{k+1}}, \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial t_{k+1}} = \frac{t_k}{t_{k+1}^2}. \quad (\text{A.58})$$

Переписывая это выражение в явной форме, можно написать определитель для обратной матрицы Якоби в следующем виде:

$$J_n^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{t_2} & \frac{t_1}{t_2^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t_3} & \frac{t_2}{t_3^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t_4} & \frac{t_3}{t_4^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{t_n} & \frac{t_n}{t_{n+1}^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{t_{n+1}} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Получим рекуррентное соотношение, которому подчиняется данный определитель. Для этого раскроем его по самой нижней строчке. Получим:

$$J_n^{-1} = -\frac{1}{t_{n+1}} \begin{vmatrix} -\frac{1}{t_2} & \frac{t_1}{t_2^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t_3} & \frac{t_2}{t_3^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t_4} & \frac{t_3}{t_4^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{t_n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t_{n+1}} J_{n-1}^{-1}. \quad (\text{A.60})$$

Зададим дополнительное условие:

$$J_2^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{t_2} & \frac{t_1}{t_2^2} \\ 0 & -\frac{1}{t_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{t_2 t_3}. \quad (\text{A.61})$$

Тогда получим, что:

$$J_n^{-1} = \frac{(-1)^n}{t_{n+1} t_n \dots t_3 t_2} = \frac{(-1)^n}{t t_n \dots t_3 t_2}. \quad (\text{A.62})$$

Теперь надо переписать J_n^{-1} через новые переменные ξ_j . Для этого выразим t_k через ξ_j :

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n+1}(1 - \xi_n) = t(1 - \xi_n), \\ t_{n-1} &= t_n(1 - \xi_{n-1}) = t(1 - \xi_n)(1 - \xi_{n-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} t_k &= t_{k+1}(1 - \xi_k) = t_{k+2}(1 - \xi_k)(1 - \xi_{k+1}) \\ &= t(1 - \xi_n)(1 - \xi_{n-1}) \dots (1 - \xi_k) = t \prod_{j=k}^n (1 - \xi_j). \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Эти выражения позволяют написать формулу для $J_n = 1/J_n^{-1}$:

$$J_n = t^n \prod_{k=1}^n (1 - \xi_k)^{k-1}. \quad (\text{A.65})$$

Стоит заметить, что пределы интегрирования для новых переменных являются просто отрезками $[0,1]$, а вся область интегрирования по времени (с учетом переориентации объема интегрирования — за нее отвечают минусы в якобиане перехода) есть $I_n = [0,1]^n$.

Также будет полезным следующее выражение:

$$t_{k+1} - t_k = t_{k+1} \xi_k = t(1 - \xi_n)(1 - \xi_{n-1}) \dots (1 - \xi_{k+1}) \xi_k. \quad (\text{A.66})$$

Подставляя это все в формулу (3.22), получаем:

$$\begin{aligned}
\delta G^{(n)} &= (c\mu_s t)^n \left(\prod_{i=1}^n \int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_k)^{k-1} \right) \times \\
&\times \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{s}_j g(\hat{s}_{j+1}, \hat{s}_j) G_0(\mathbf{r}', t_1, \hat{\mathbf{s}}_1), \text{ где } \mathbf{r}' = \mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)}, \\
\mathbf{s}^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_{n-k} \xi_{n-k} \left(\prod_{i=1}^k (1 - \xi_{n-i+1}) \right) = \hat{\mathbf{s}}_n \xi_n \\
&+ \hat{\mathbf{s}}_{n-1} \xi_{n-1} (1 - \xi_n) + \dots + \hat{\mathbf{s}}_1 \xi_1 (1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_2) \\
&+ \hat{\mathbf{s}}_0 \xi_0 (1 - \xi_n) \dots (1 - \xi_1).
\end{aligned} \tag{A.67}$$

A.6 Вероятностный вывод решения

Покажем, что решение уравнения переноса (3.39) может быть выведено исключительно из принципов теории вероятностей, без обращения к самому уравнению переноса. Такой подход не только проясняет физические основы данного решения, но и усиливает обоснованность полученного результата. Рассмотрим последовательность из n независимых событий рассеяния, происходящих в течение временного интервала (t_0, t) . Эти события случайным образом распределены по временам t_1, t_2, \dots, t_n и направлениям $\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \dots, \hat{\mathbf{s}}_n$. Функция плотности вероятности (PDF) экспоненциального распределения определяется как:

$$p(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Не умаляя общности предположим, что все времена упорядочены:

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t. \tag{A.68}$$

Исходя из этого предположения, мы можем написать совместную плотность распределения:

$$\begin{aligned}
p(t_1, t_2, \dots, t_n; \lambda) &= \lambda e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \cdot \lambda e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \cdot e^{-\lambda(t - t_n)} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t},
\end{aligned} \tag{A.69}$$

где каждый множитель $\lambda e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}$ представляет плотность распределения в (t_{i-1}, t_i) , а последний сомножитель означает вероятность того, что событие

рассеяния не произойдет в интервале (t_n, t) . Так как все промежуточные переменные выбираются случайным образом, мы должны усреднить (проинтегрировать) полученный результат по ним, предполагая, что начальная точка излучения фотона и конечная точка фиксированы (а также начальное и конечное направления). Для учета фиксированных переменных мы используем дельта функцию Дирака, которая будет фиксировать определенную траекторию фотона при конкретных реализациях всех случайных переменных.

Итак, фотон излучается в точке \mathbf{r}_0 в момент времени t_0 и движется вдоль направления $\hat{\mathbf{s}}_0$. Наблюдается фотон в точке \mathbf{r} в момент времени t с направлением $\hat{\mathbf{s}}$. Траектория фотона учитывается с помощью следующей функции Дирака:

$$\delta^3(\mathbf{r}_0 + c(t_1 - t_0)\hat{\mathbf{s}}_0 + c(t_2 - t_1)\hat{\mathbf{s}}_1 + \dots + c(t - t_n)\hat{\mathbf{s}}_n - \mathbf{r}) \cdot \delta^2(\hat{\mathbf{s}}_n - \hat{\mathbf{s}}), \quad (\text{A.70})$$

Вторая дельта функция указывает нам на то, что угол после последнего рассеяния должен совпадать с углом, который мы наблюдаем в точке \mathbf{r} .

Для упорядочивания времен, которое мы выбрали, справедливы следующие соотношения:

$$t_1 \in (t_0, t_2), \quad t_2 \in (t_0, t_3), \quad \dots \quad t_n \in (t_0, t). \quad (\text{A.71})$$

Полная вероятность $P(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ наблюдать фотон в точке \mathbf{r} в момент времени t с направлением $\hat{\mathbf{s}}$ дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \int_{t_0}^t dt_n \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \dots \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_n \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2) \dots f(\hat{\mathbf{s}}_{n-1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_n) \\ &\times \delta^3(\mathbf{r}_0 + c(t_1 - t_0)\hat{\mathbf{s}}_0 + c(t_2 - t_1)\hat{\mathbf{s}}_1 + \dots + c(t - t_n)\hat{\mathbf{s}}_n - \mathbf{r}) \\ &\times \delta^2(\hat{\mathbf{s}}_n - \hat{\mathbf{s}}) e^{-\mu_a c t}, \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

где последнее слагаемое соответствует вероятности того, что за все время распространения фотон не поглотится средой. Умножая вероятность $P(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ на скорость света в среде c (нормировочный фактор), получаем в точности формулу (3.39).

А.7 Свойства функции Хеньи-Гринштейна

А.7.1 Обобщение функции Хеньи-Гринштейна

На случай n измерений можно обобщить функцию Хеньи-Гринштейна (ХГ) следующим образом:

$$dP(x) = p_g^{nD}(x)d\mu_n(x), \quad (\text{A.73})$$

где

$$p_g^{nD}(x) = A_n(1 + g^2 - 2gx)^{-n/2}. \quad (\text{A.74})$$

Здесь $d\mu_n(x)$ — мера интегрирования, которая имеет следующий вид:

$$d\mu_n(x) = \begin{cases} \delta(x-1) + \delta(x+1), & n = 1 \\ d\varphi, & n = 2 \\ dS_{n-1}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (\text{A.75})$$

Константы интегрирования можно найти из условия нормировки. Также можно ввести и характеристическую функцию распределения следующим образом:

$$\Psi^{nD}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_g^{nD}(x)e^{ikx}d\mu_n(x). \quad (\text{A.76})$$

Одномерный случай

В одномерном случае можно написать:

$$\begin{aligned} \int p_g^{1D}(x)d\mu_1(x) &= A_1 \int (1 + g^2 - 2gx)^{-1/2}(\delta(x-1) + \delta(x+1))dx \\ &= A_1 \left(\frac{1}{1-g} + \frac{1}{1+g} \right) = \frac{2A_1}{1-g^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Значит,

$$A_1 = \frac{1-g^2}{2} \quad (\text{A.78})$$

и

$$p_g^{1D}(x) = \begin{cases} \frac{1+g}{2}, & x = 1 \\ \frac{1-g}{2}, & x = -1 \end{cases}. \quad (\text{A.79})$$

Аналогично находится, что:

$$\begin{aligned} \psi^{1D}(k) &= A_1 \int (1 + g^2 - 2gx)^{-1/2} (\delta(x-1) + \delta(x+1)) e^{ikx} dx \\ &= e^{-ik} + i(1-g) \sin(k). \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Двумерный случай

В двумерном случае направление однозначно задается полярным углом φ . Найдем константу нормировки:

$$\begin{aligned} 1 &= \int p_g^{2D}(x) d\mu_2(x) = A_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + g^2 - 2g \cos(\varphi - \varphi_1)} \\ &= A_2 \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{1 + g^2 - 2g \cos(\varphi - \varphi_1)} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{iA_2 z_0}{g} \frac{dz}{(z - gz_0)(z - z_0/g)} = \frac{2\pi}{1 - g^2} A_2, \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

где введено обозначение $z_0 = e^{i\varphi_1}$. Значит,

$$A_2 = \frac{1 - g^2}{2\pi}. \quad (\text{A.82})$$

Высшие размерности

Аналогично находится, что

$$p_g^{nD}(x) = \frac{(n-2)g(1-g^2)^{n-2}}{(2\pi)^{n-2} f_n(g)} (1 + g^2 - 2gx)^{-n/2}, \quad (\text{A.83})$$

где

$$f_n(g) = (1+g)^{n-2} - (1-g)^{n-2}. \quad (\text{A.84})$$

Характеристическая функция же имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi^{nD}(k) &= A_n \int_{-1}^1 dx (1 + g^2 - 2gx)^{-n/2} e^{-ikx} \\
&= \frac{A_n}{2g} \int_{(1-g)^2}^{(1+g)^2} dx x^{-n/2} e^{-ik(\frac{1+g^2}{2g} - \frac{x}{2g})} = \frac{(1-g^2)^{n-2}}{2f_n(g)} e^{ik(1+g^2)/2g} \\
&\times \left((1-g)^{n-2} E_{n/2}(ik(1-g)/2g) - (1+g)^{n-2} E_{n/2}(ik(1+g)/2g) \right),
\end{aligned} \tag{A.85}$$

где

$$E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt} \frac{dt}{t^n}. \tag{A.86}$$

А.7.2 Трехмерный случай

Можно посмотреть и на другой представление данной функции для трех измерений. Характеристическая функция для такой размерности имеет вид:

$$h_g(y) = 2\pi \int_{-1}^1 dx f_g(x) e^{ixy} = \frac{1-g^2}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{e^{ixy}}{(1+g^2-2gx)^{3/2}}. \tag{A.87}$$

Здесь дополнительный фактор 2π возникает из-за интегрирования по азимутальному углу φ . Исследуем, как устроена функция $h_g(y)$. Для этого рассмотрим более общую функцию:

$$h_g(y; a, b) = \frac{1-g^2}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{e^{ixy}}{(a+bx)^{3/2}}. \tag{A.88}$$

Заметим, что функция $h_g(y; a, b)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) h_g(y; a, b) = -\frac{3}{2} h_g(y; a, b). \tag{A.89}$$

Это уравнение имеет следующие соотношения на характеристические кривые:

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = -\frac{2dh_g}{3h_g}. \tag{A.90}$$

Отсюда получаем решение

$$h_g(y; a, b) = a^{-3/2} F(y, b/a), \quad (\text{A.91})$$

где

$$F(y, t) = \frac{1 - g^2}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{e^{ixy}}{(1 + tx)^{3/2}}. \quad (\text{A.92})$$

Рассмотрим интеграл, имеющий следующий вид:

$$I(k) = \int_{-1}^1 dx \frac{e^{ikx}}{(1 + tx)^{3/2}}. \quad (\text{A.93})$$

Учтем соотношение:

$$(1 + xt)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-3/2}^n (tx)^n. \quad (\text{A.94})$$

Таким образом, можно написать:

$$I(k) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-3/2}^n t^n \int_{-1}^1 dx x^n e^{ikx}. \quad (\text{A.95})$$

Учтем, что

$$\int_{-1}^1 dx x^n e^{ikx} = \left(-i \frac{d}{dk}\right)^n \int_{-1}^1 dx e^{ikx} = \left(-i \frac{d}{dk}\right)^n \text{sinc}(k), \quad (\text{A.96})$$

где было использовано стандартное обозначение

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (\text{A.97})$$

Распишем биномиальный коэффициент:

$$C_{-3/2}^n = \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n-1/2)} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{n!\Gamma(-n-1/2)}. \quad (\text{A.98})$$

Распишем гамма-функцию в знаменателе:

$$\Gamma(-n-1/2) = \frac{\Gamma(-n+1/2)}{-n-1/2} = \frac{(-1)^{n+1} 4^n n!}{(2n+1)! \sqrt{\pi}}. \quad (\text{A.99})$$

Таким образом, мы получаем, что

$$C_{-3/2}^m = \frac{(-1)^n (2n+1) C_{2n}^n}{2^{2n-1}} \quad (\text{A.100})$$

В конечном итоге приходим к следующему выражению:

$$I(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) C_{2n}^n}{2^{2n-1}} \left(it \frac{d}{dk} \right)^n \text{sinc}(k) \quad (\text{A.101})$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dk} \right)^n \text{sinc}(k) &= \left(\frac{d}{dk} \right)^n \frac{\sin(k)}{k} = \sum_{m=0}^n C_n^m (\sin(k))^{(m)} \left(\frac{1}{k} \right)^{(n-m)} \\ &= \frac{n!}{k^{n+1}} \sum_{m=0}^n \left((-1)^{m/2} \sin(k) \cdot [m = 2l] + (-1)^{(m+1)/2} \cos(k) \cdot [m = 2l + 1] \right) \\ &= \frac{n!}{k^{n+1}} (Cos(k, n) \sin(k) - Sin(k, n) \cos(k)), \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

где

$$Cos(k, n) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^l k^{2l}}{(2l)!} \quad (\text{A.103})$$

и

$$Sin(k, n) = \sum_{l=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^l k^{2l+1}}{(2l+1)!}. \quad (\text{A.104})$$

Заметим, что эти функции представляют собой частичные суммы ряда Тейлора для тригонометрических функций. Таким образом получаем:

$$I(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)n! C_{2n}^n}{2^{2n-1}} \left(\frac{it}{k} \right)^n (Cos(k, n) \sin(k) - Sin(k, n) \cos(k)). \quad (\text{A.105})$$

Значит характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} I(k) &= \frac{1-g^2}{2(1+g^2)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)n! C_{2n}^n}{2^{2n-1}} \left(\frac{-i(1+g^2)}{2gk} \right)^n \\ &\quad \times (Cos(k, n) \sin(k) - Sin(k, n) \cos(k)). \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

А.7.3 Производящие ряды для функции Хеньи-Гринштейна

Заметим, что для производной функции ХГ справедливо следующее равенство:

$$p_g^{(1)}(x) := \frac{dp_g(x)}{dx} = \frac{3g}{1+g^2-2gx}p_g(x). \quad (\text{A.107})$$

Аналогично, можно записать выражение для n -й производной:

$$p_g^{(n)}(x) := \frac{d^n p_g(x)}{dx^n} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)g^n}{(1+g^2-2gx)^n} p_g(x). \quad (\text{A.108})$$

Это выражение также можно переписать через двойной факториал:

$$p_g^{(n)}(x) = \frac{(2n+1)!!g^n}{(1+g^2-2gx)^n} p_g(x) = \frac{(2n)!(g/2)^n}{n!(1+g^2-2gx)^n} p_g(x). \quad (\text{A.109})$$

Здесь учтено соотношение, связывающее двойной факториал с обычным факториалом:

$$(2n+1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (\text{A.110})$$

Просуммируем все эти соотношения в ряд Тейлора:

$$p_g(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} p_g^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(yg/2)^n}{(n!)^2(1+g^2-2gx)^n} p_g(x). \quad (\text{A.111})$$

Таким образом, можно продлить функцию Хеньи-Гринштейна по переменной x за пределы промежутка $(-1,1)$ как обобщенную функцию:

$$\frac{p_g(x+y)}{p_g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(yg/2)^n}{(n!)^2(1+g^2-2gx)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n \frac{(yg/2)^n}{(1+g^2-2gx)^n}. \quad (\text{A.112})$$

Здесь радиус сходимости зависит от параметров (x,g) и равен

$$R = \frac{1+g^2}{2g} - x. \quad (\text{A.113})$$

Из этой формулы можно получить разные следствия. Во-первых, положим $x = 0$ и получим разложение для функции Хеньи-Гринштейна:

$$\frac{p_g(y)}{p_g(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n \frac{(yg/2)^n}{(1+g^2)^n}. \quad (\text{A.114})$$

Здесь $p_g(0)$ — константа, численно равная

$$p_g(0) = \frac{1 - g^2}{4\pi} \quad (\text{A.115})$$

Теперь продлим эту функцию на промежуток $[k - 1, k + 1]$. Для этого положим $y = k$:

$$\frac{p_g(x + k)}{p_g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^m \frac{(kg/2)^n}{(1 + g^2 - 2gx)^n}. \quad (\text{A.116})$$

Таким образом имеем:

$$p_g(x + k) = \frac{1 - g^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^m \frac{(kg/2)^n}{(1 + g^2 - 2gx)^{n+3/2}}. \quad (\text{A.117})$$

A.8 Решения трехмерной задачи для изотропного случая

Общее решение для произвольного g имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= (\mu_s ct)^n e^{-c\mu t} \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j g(\hat{\mathbf{s}}_{j+1}, \hat{\mathbf{s}}_j) \right) g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) c \delta^3(\mathbf{r} - ct \mathbf{s}^{(n)}). \end{aligned} \quad (\text{A.118})$$

Если положить $g = 0$, то функция рассеяния превращается в константу и можно написать:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= \left(\frac{\mu_s ct}{4\pi} \right)^n e^{-c\mu t} \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j \right) c \delta^3(\mathbf{r} - ct \mathbf{s}^{(n)}). \end{aligned} \quad (\text{A.119})$$

Учтем, что

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (\text{A.120})$$

Принимая это во внимание, мы можем написать:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= \left(\frac{\mu_s ct}{4\pi} \right)^n e^{-c\mu_t t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j \right) c e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - ct\mathbf{s}^{(n)})}. \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

Выбирая все промежуточные направления так, что они образуют с вектором \mathbf{k} угол θ_i , можем написать:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= \left(\frac{\mu_s ct}{4\pi} \right)^n e^{-c\mu_t t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j e^{i\mu_s ct a_j \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j} \right) c e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

Раскрывая выражение для меры интегрирования по направлениям, получаем:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= \left(\frac{\mu_s ct}{2} \right)^n e^{-c\mu_t t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_i (1 - \xi_i)^{i-1} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{-1}^1 d \cos \theta_j e^{i\mu_s ct a_j \cos \theta_j} \right) c e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (\text{A.123})$$

Интегрируя это выражение по косинусам, получаем формулу (3.50)

A.9 Итерационная схема для численного расчета

Воспроизведем схему, на основе которой производится численный расчет для дельтаобразного источника. В качестве отправной точки возьмем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-c\mu_t t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

Будем вычислять интегральный поток, т.е. величину, определяемую следующим равенством:

$$\delta\Phi^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \delta L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}). \quad (\text{A.125})$$

Подставляя в него определение $\delta L^{(n)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(n)}(\mathbf{r}, t) &= (\mu_s c)^n e^{-c\mu_s t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_{j-1}) \right) \times \\ &\times c \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

Попробуем представить дельта-функцию как произведение одномерной дельта-функции по времени и двумерной по направлениям. Запишем удлиненный вектор в дельта-функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i) &= \mathbf{r} - \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 \\ &= \mathbf{r} - \sum_{i=2}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i) - c\hat{\mathbf{s}}_1 (t_2 - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1 = \mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_1 (t_2 - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1. \end{aligned} \quad (\text{A.127})$$

Учитывая это, можно написать:

$$\delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)) = \frac{1}{c^2 (t_2 - t_1)^2} \delta^2(\hat{\mathbf{s}}_1 - \hat{\mathbf{s}}_1^*) \delta(|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1| - c(t_2 - t_1)), \quad (\text{A.128})$$

где

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} = \mathbf{r} - \sum_{i=2}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i). \quad (\text{A.129})$$

Здесь использован тот факт, что

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2} \delta(r - r_0) \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0). \quad (\text{A.130})$$

Значение эффективного угла рассеяния определяется следующей формулой:

$$\hat{\mathbf{s}}_1^* = \hat{\mathbf{s}}_0 + 2 \frac{\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2}{|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2|^2} (c t_2 - \mathbf{r}_{\text{eff}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0). \quad (\text{A.131})$$

Последний шаг — расписать одномерную дельта функцию. Для этого найдем нули аргумента дельта функции:

$$f = |\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1^*| - c(t_2 - t_1^*) = 0, \quad (\text{A.132})$$

$$t_1^* = \frac{c^2 t_2^2 - r_{\text{eff}}^2}{2c(c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2 - \mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)}, \quad (\text{A.133})$$

$$t_2 - t_1^* = \frac{|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2|^2}{2c(c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2 - \mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)}. \quad (\text{A.134})$$

Учитывая, что

$$\frac{df}{dt_1} = \frac{(c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2 - \mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)}{t_2 - t_1}, \quad (\text{A.135})$$

получаем, что:

$$\delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)) = \frac{2}{c|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2|^2} \delta^2(\hat{\mathbf{s}}_1 - \hat{\mathbf{s}}_1^*) \delta(t_1 - t_1^*). \quad (\text{A.136})$$

Теперь, расписав дельта-функцию таким образом, мы можем снять интегралы по t_1 и $\hat{\mathbf{s}}_1$. Также надо учесть, что значение во временной дельта-функции должно принадлежать промежутку интегрирования, иначе интеграл будет равняться нулю. Это в итоге приведет нас в результате к тета-функции. Собирая все вычисления вместе, получим:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(n)}(\mathbf{r}, t) &= 2(\mu_s c)^n e^{-c\mu_s t} \left(\prod_{i=2}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \left(\prod_{j=3}^n \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_{j-1}) \right) \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1^*) f(\hat{\mathbf{s}}_1^*, \hat{\mathbf{s}}_0) \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2|^2} H((c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2 - \mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)) H(c^2 t_2^2 - r_{\text{eff}}^2). \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Отдельно распишем нулевой, первый и второй порядки.

1) Нулевой порядок:

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = c e^{-\mu_s c t} \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t) = e^{-\mu_s c t} \frac{\delta(t - r/c)}{r^2} \delta^2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}}_0). \quad (\text{A.138})$$

2) Первый порядок:

$$\delta\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = 2c\mu_s \frac{e^{-c\mu_s t} f(\hat{\mathbf{s}}_1^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} H((ct)^2 - r^2) H(ct - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)), \quad (\text{A.139})$$

где

$$\hat{\mathbf{s}}_1^* = \hat{\mathbf{s}}_0 + 2 \frac{\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} (ct - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0). \quad (\text{A.140})$$

3) Второй порядок:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= 2(\mu_s c)^2 e^{-c\mu_s t} \int_0^t dt' \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \frac{f(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}^*) f(\hat{\mathbf{s}}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t'|^2} \\ &\times H((ct')^2 - \mathbf{r}_{\text{eff}}^2) H(ct' - (\mathbf{r}_{\text{eff}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)), \end{aligned} \quad (\text{A.141})$$

где

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t'), \quad (\text{A.142})$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1^* = \hat{\mathbf{s}}_0 + 2 \frac{\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2}{|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2|^2} (ct' - \mathbf{r}_{\text{eff}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0). \quad (\text{A.143})$$

Здесь можно сделать несколько замечаний к данным формулам.

1) Произведения двух тета-функций можно превратить в одну тета-функцию:

$$H(ct_2 - (\mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)) H(c^2 t_2^2 - r_{\text{eff}}^2) = H(ct_2 - (\mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)). \quad (\text{A.144})$$

Это возможно из-за того, что второй аргумент всегда больше первого.

2) Можно написать и формулы для потока $\delta L^{(n)}$. Для первого и нулевого порядка их можно увидеть в Главе 2. Для $n \geq 2$ мы можем написать:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= 2(\mu_s c)^n e^{-c\mu_s t} \left(\prod_{i=2}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \left(\prod_{j=3}^{n-1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_{j-1}) \right) \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1^*) f(\hat{\mathbf{s}}_1^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) f(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{n-1}) \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{eff}} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2|^2} H((c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2 - \mathbf{r}_{\text{eff}}, \hat{\mathbf{s}}_0)). \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

A.10 Средние значения переменных для трехмерной задачи переноса

Выведем формулы для средних значений. Пусть $L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})$ решение уравнения переноса. Можем определить среднее следующим образом:

$$\langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}. \quad (\text{A.146})$$

Также можно определить среднее, получаемое при условии, что фотон испытал ровно n актов рассеяния:

$$\langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle^{(n)} = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}{\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}})}. \quad (\text{A.147})$$

Для расчета средних будем использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} = & (\mu_s c)^n e^{-c\mu_t t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ & \times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) c \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.148})$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c(\mu_s c t)^n e^{-c\mu_t t}. \quad (\text{A.149})$$

Отсюда находим нормировку

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int d^3\mathbf{r} L^{(n)}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = c e^{-c\mu_a t}. \quad (\text{A.150})$$

Данная нормировка имеет следующий смысл — она описывает вероятность не поглотиться фотону в среде за время t . Учитывая эту нормировку, можем записать общее выражение для среднего при условии, что у нас было n актов

рассеяния:

$$\begin{aligned} \langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle^{(n)} &= \frac{(\mu_s c)^n}{c} e^{-\mu_s c t} \int d\mathbf{r} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

Полное среднее определяется как

$$\langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) \rangle^{(n)}. \quad (\text{A.152})$$

В первую очередь определим среднее от координаты. Среднее значение координаты определяется как

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \int d\mathbf{r} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \mathbf{r} \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_k (t_{k+1} - t_k)). \end{aligned} \quad (\text{A.153})$$

Снимаем дельта функцию интегрированием по пространству:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle^{(n)} &= c (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \int d\mathbf{r} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_k (t_{k+1} - t_k). \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

Чтобы посчитать этот интеграл, понадобятся вспомогательные интегралы.

Среднее направление по совокупности функций Хеньи-Гринштейна

Рассмотрим интеграл вида

$$I_k = \int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \dots \int_{\mathcal{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_n f_g(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) \dots f_g(\hat{\mathbf{s}}_{n-1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_n) \hat{\mathbf{s}}_k. \quad (\text{A.155})$$

Здесь мы явно указываем параметр асимметрии у функции рассеяния. Учитывая групповое свойство функции рассеяния и то, что функция Хинье-Гринштейна удовлетворяет условию нормировки, можно написать, что:

$$I_k = \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_k f_{g^k}(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_k) \hat{\mathbf{s}}_k = g^k \hat{\mathbf{s}}_0. \quad (\text{A.156})$$

Теперь рассмотрим еще один интеграл:

$$(I_{km})_{ij} = \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \dots \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_n f_g(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_1) \dots f_g(\hat{\mathbf{s}}_{n-1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_n) (\hat{\mathbf{s}}_k)_i (\hat{\mathbf{s}}_m)_j, \quad (\text{A.157})$$

где i и j - координатные индексы. Не уменьшая общности, будем считать, что $k < m$. Аналогично, как и предыдущий интеграл, он сводится к интегралу вида

$$(I_{km})_{ij} = \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_k \dots \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_m f_{g^k}(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_k) \dots f_g(\hat{\mathbf{s}}_{m-1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_m) (\hat{\mathbf{s}}_k)_i (\hat{\mathbf{s}}_m)_j. \quad (\text{A.158})$$

Этот интеграл можно посчитать, последовательно выполняя интегрирование:

$$(I_{km})_{ij} = \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_k \dots \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_{m-1} f_{g^k}(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_k) \dots f_g(\hat{\mathbf{s}}_{m-2} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{m-1}) (\hat{\mathbf{s}}_k)_i g(\hat{\mathbf{s}}_{m-1})_j. \quad (\text{A.159})$$

Выполняя интегрирование $m-k-1$ раз, приходим к тому, что

$$(I_{km})_{ij} = g^{m-k} \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_k f_{g^k}(\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_k) (\hat{\mathbf{s}}_k)_i (\hat{\mathbf{s}}_k)_j. \quad (\text{A.160})$$

Используя формулу для второго момента функции Хеньи-Гринштейна, получаем:

$$(I_{km})_{ij} = g^{m-k} \left(\frac{1 - g^{2k}}{3} \delta_{ij} + g^{2k} (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right). \quad (\text{A.161})$$

Временные интегралы

Следующий интеграл, который необходимо рассмотреть — это интеграл вида

$$J_k = \int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 (t_{k+1} - t_k). \quad (\text{A.162})$$

Сделаем замену переменных:

$$\xi_i = 1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}. \quad (\text{A.163})$$

Тогда интеграл переписывается в следующем виде:

$$J_k = t^{n+1} \int_0^1 d\xi_n (1 - \xi_n)^{n-1} \dots \int_0^1 d\xi_2 (1 - \xi_2) \int_0^1 d\xi_1 (t_{k+1} - t_k). \quad (\text{A.164})$$

Учитывая, что

$$t_{k+1} - t_k = \xi_k (1 - \xi_{k+1}) \dots (1 - \xi_n), \quad (\text{A.165})$$

получаем:

$$\begin{aligned} J_k &= t^{n+1} \int_0^1 d\xi_n (1 - \xi_n)^n \dots \int_0^1 d\xi_{k+1} (1 - \xi_{k+1})^{k+1} \times \\ &\int_0^1 d\xi_k \xi_k (1 - \xi_k)^{k-1} \int_0^1 d\xi_{k-1} (1 - \xi_{k-1})^{k-2} \dots \int_0^1 d\xi_2 (1 - \xi_2) \int_0^1 d\xi_1 = \\ &t^{n+1} B(1, n+1) \dots B(1, k+2) B(2, k) B(1, k-1) \dots B(1, 2) B(1, 1) = \\ &\frac{t^{n+1} B(2, k)}{B(1, k) B(1, k+1)} \prod_{i=1}^{n+1} B(1, i) = t^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (\text{A.166})$$

Здесь $B(p, q)$ - бета-функция Эйлера и также было учтено, что

$$B(1, i) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(i)}{\Gamma(i+1)} = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i} \quad (\text{A.167})$$

и

$$B(2, k) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(k)}{\Gamma(k+2)} = \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)}. \quad (\text{A.168})$$

Таким образом получаем, что J_k не зависят от индекса k :

$$J_k = J_0 = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (\text{A.169})$$

Теперь рассмотрим следующие интегралы:

$$J_{km} = \int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 (t_{k+1} - t_k)(t_{m+1} - t_m), \quad (\text{A.170})$$

где, не теряя общности, можно положить $k < m$. Аналогично, делая замену переменных (A.163), получаем:

$$\begin{aligned}
J_{km} &= t^{n+2} \int_0^1 d\xi_n (1 - \xi_n)^{n+1} \dots \int_0^1 d\xi_{k+1} (1 - \xi_{k+1})^{k+2} \times \\
&\int_0^1 d\xi_k \xi_k (1 - \xi_k)^k \int_0^1 d\xi_{k-1} (1 - \xi_{k-1})^{k-1} \dots \int_0^1 d\xi_{m+1} (1 - \xi_{m+1})^{m+1} \times \\
&\int_0^1 d\xi_m \xi_m (1 - \xi_m)^{m-1} \int_0^1 d\xi_{m-1} (1 - \xi_{m-1})^{m-2} \dots \int_0^1 d\xi_2 (1 - \xi_2) \int_0^1 d\xi_1 = \\
&t^{n+2} B(1, n+2) \dots B(1, k+3) B(2, k+1) B(1, k) \dots B(1, m+2) \times \\
&B(2, m) B(1, m-1) \dots B(1, 2) B(1, 1) = \frac{t^{n+2} B(2, k+1)}{B(1, k+1) B(1, k+2)} \times \\
&\frac{B(2, m)}{B(1, m) B(1, m+1)} \prod_{i=1}^{n+2} B(1, i) = t^{n+2} \prod_{i=1}^{n+2} \frac{1}{i} = \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} = J_{00}.
\end{aligned} \tag{A.171}$$

Отдельно надо рассмотреть случай $k = m$:

$$\begin{aligned}
J_{kk} &= t^{n+2} \int_0^1 d\xi_n (1 - \xi_n)^{n+1} \dots \int_0^1 d\xi_{k+1} (1 - \xi_{k+1})^{k+2} \times \\
&\int_0^1 d\xi_k \xi_k^2 (1 - \xi_k)^{k-1} \int_0^1 d\xi_{k-1} (1 - \xi_{k-1})^{k-2} \dots \int_0^1 d\xi_2 (1 - \xi_2) \int_0^1 d\xi_1 = \\
&t^{n+2} B(1, n+2) \dots B(1, k+3) B(3, k) B(1, k-1) \dots B(1, 2) B(1, 1) = \\
&\frac{t^{n+2} B(3, k)}{B(1, k) B(1, k+1) B(1, k+2)} \prod_{i=1}^{n+2} B(1, i) = 2t^{n+2} \prod_{i=1}^{n+2} \frac{1}{i} = 2 \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}.
\end{aligned} \tag{A.172}$$

В последней строке было учтено, что

$$B(3, k) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(k)}{\Gamma(k+3)} = \frac{2(k-1)!}{(k+2)!} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}. \tag{A.173}$$

Таким образом получаем, что

$$J_{km} = J_{00}(1 + \delta_{km}). \tag{A.174}$$

Эти интегралы будут необходимы для расчета как среднего от координаты, так и координатной дисперсии.

Среднее от координаты: продолжение расчета

Вернемся к формуле (A.154) и продолжим расчет:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r} \rangle^{(n)} &= c(\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\
 &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_k (t_{k+1} - t_k) = c(\mu_s c)^n \sum_{k=0}^n I_k J_k = \\
 &c(\mu_s c)^n \sum_{k=0}^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} g^k \hat{\mathbf{s}}_0 = c(\mu_s c)^n \frac{t^{n+1}(1-g^{n+1})}{(1-g)(n+1)!} \hat{\mathbf{s}}_0.
 \end{aligned} \tag{A.175}$$

Полная средняя координата, просуммированная по все порядкам рассеяния, есть

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{r} \rangle^{(n)} = c \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \frac{t^{n+1}(1-g^{n+1})}{(1-g)(n+1)!} \hat{\mathbf{s}}_0. \tag{A.176}$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$x = \mu_s c t. \tag{A.177}$$

$$\mu'_s = \mu_s (1-g). \tag{A.178}$$

$$\mu''_s = \mu_s (1-g^2). \tag{A.179}$$

Здесь μ'_s и μ''_s имеют смысл эффективных обратных длин рассеяния. В новых обозначениях можем написать, что

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^{n+1}(1-g^{n+1})}{\mu'_s (n+1)!} \hat{\mathbf{s}}_0. \tag{A.180}$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}(1-g^{n+1})}{(n+1)!} = e^x - e^{gx}, \tag{A.181}$$

МОЖЕМ ВЫВЕСТИ:

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{\mu'_s} (1 - \exp(-\mu'_s c t)) \hat{\mathbf{s}}_0. \tag{A.182}$$

Теперь разберемся со средним значением от направления. Определим среднее значение направления:

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle^{(n)} = (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_{j-1}) \right) \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{A.183})$$

и среднее значение скорости:

$$\langle \mathbf{v} \rangle^{(n)} = \langle c \hat{\mathbf{s}} \rangle^{(n)} = c \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle^{(n)}. \quad (\text{A.184})$$

Проводя аналогичный расчет, можем написать, что

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle^{(n)} = (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} I_n \frac{t^n}{n!} = (\mu_s c g)^n e^{-\mu_s c t} \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{A.185})$$

При вычислении было учтено, что

$$\left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) = \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{A.186})$$

После суммирования получаем:

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle^{(n)} = e^{-\mu_s c t} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_s c g)^n \frac{t^n}{n!} = \exp(-\mu'_s c t) \hat{\mathbf{s}}_0. \quad (\text{A.187})$$

Отсюда следует, что

$$\langle \mathbf{v} \rangle = c \exp(-\mu'_s c t) \hat{\mathbf{s}}_0. \quad (\text{A.188})$$

Теперь получим формулу для корреляций направлений:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle^n = (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_{j-1}) \right) \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j. \quad (\text{A.189})$$

Эту формулу можно переписать в виде:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle^n = (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} (I_{nn})_{ij} \frac{t^n}{n!} = \frac{(\mu_s c t)^n}{n!} e^{-\mu_s c t} \left(\frac{1 - g^{2n}}{3} \delta_{ij} + g^{2n} (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right). \quad (\text{A.190})$$

Суммируя, имеем:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_s c t)^n}{n!} e^{-\mu_s c t} \left(\frac{1 - g^{2n}}{3} \delta_{ij} + g^{2n} (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right). \quad (\text{A.191})$$

Учтем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_s ct)^n}{n!} e^{-\mu_s ct} g^{2n} = e^{-\mu_s ct(1-g^2)} = e^{-\mu_s'' ct}. \quad (\text{A.192})$$

Подставляя это выражение в формулу выше, получаем:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} (1 - \exp(-\mu_s'' ct)) + \exp(-\mu_s'' ct) \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}. \quad (\text{A.193})$$

Выведем теперь корреляции между координатой и направлением. По определению имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-\mu_s ct} \int d\mathbf{r} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \mathbf{r}_i(\hat{\mathbf{s}})_j \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_k (t_{k+1} - t_k)). \end{aligned} \quad (\text{A.194})$$

Так как теперь помимо индекса координаты есть индекс, который пробегает по направлениям фотона в траектории, то координатный индекс будем указывать после круглых скобок. Продолжим вычисления:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle^{(n)} &= c(\mu_s c)^n e^{-\mu_s ct} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \sum_{k=0}^n (\hat{\mathbf{s}}_k)_i (t_{k+1} - t_k) (\hat{\mathbf{s}})_j = c(\mu_s c)^n e^{-\mu_s ct} \sum_{k=0}^n (I_{kn})_{ij} J_k = \\ &c(\mu_s c)^n e^{-\mu_s ct} \sum_{k=0}^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} g^{n-k} \left(\frac{1-g^{2k}}{3} \delta_{ij} + g^{2k} (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right) = \\ &\frac{(\mu_s ct)^{n+1}}{\mu_s (n+1)!} e^{-\mu_s ct} g^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{g^{-k} - g^k}{3} \delta_{ij} + g^k (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right). \end{aligned} \quad (\text{A.195})$$

Учтем, что

$$\sum_{k=0}^n (g^{-k} - g^k) = \frac{g^{-n}(1-g^n)(1-g^{n+1})}{1-g} \quad (\text{A.196})$$

и

$$\sum_{k=0}^n g^k = \frac{1-g^{n+1}}{1-g}. \quad (\text{A.197})$$

Объединяя эти результаты, получаем:

$$\langle \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle^{(n)} = \frac{(\mu_s ct)^{n+1}}{\mu'_s (n+1)!} e^{-\mu_s ct} (1 - g^{n+1}) \left(\frac{1 - g^n}{3} \delta_{ij} + g^n (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right) \quad (\text{A.198})$$

Суммируя эти значения, имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_s ct)^{n+1}}{\mu'_s (n+1)!} e^{-\mu_s ct} (1 - g^{n+1}) \\ &\times \left(\frac{1 - g^n}{3} \delta_{ij} + g^n (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j \right), \end{aligned} \quad (\text{A.199})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{s}}_j \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\mu'_s (n+1)!} e^{-x} \left(\frac{1 - g^n - g^{n+1} + g^{2n+1}}{3} \delta_{ij} \right) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\mu'_s (n+1)!} e^{-x} (g^n - g^{2n+1}) (\hat{\mathbf{s}}_0)_i (\hat{\mathbf{s}}_0)_j. \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

Разберем каждое слагаемое:

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{g}{g} (1 - e^{-x}), \quad (\text{A.201})$$

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} g^n}{(n+1)!} = \frac{1}{g} (e^{-(1-g)x} - e^{-x}), \quad (\text{A.202})$$

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} g^n}{(n+1)!} = \frac{g}{g} (e^{-(1-g)x} - e^{-x}), \quad (\text{A.203})$$

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} g^{2n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{g} (e^{-(1-g^2)x} - e^{-x}). \quad (\text{A.204})$$

Таким образом имеем:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{s}}^i \mathbf{r}^j \rangle &= \frac{1}{\mu'_s g} \frac{\delta_{ij}}{3} (e^{-(1-g^2)x} + g - (1+g)e^{-(1-g)x}) \\ &+ \frac{1}{\mu'_s g} (e^{-x(1-g)} - e^{-(1-g^2)x}) \hat{\mathbf{s}}_0^i \hat{\mathbf{s}}_0^j. \end{aligned} \quad (\text{A.205})$$

Чтобы получить корреляцию скалярного произведения, просуммируем это выражение с символом Кронекера:

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \mathbf{r} \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\mathbf{s}}^i \mathbf{r}^j \rangle \delta_{ij} = \frac{1}{\mu'_s g} (g - g e^{-(1-g^2)x}) = \frac{1}{\mu'_s} (1 - e^{-(1-g^2)x}). \quad (\text{A.206})$$

В итоге получим формулу для пространственных корреляций. Начнем с определения:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \int d\mathbf{r} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{s}}_k (t_{k+1} - t_k)). \end{aligned} \quad (\text{A.207})$$

Снимаем интеграл по пространству:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle^{(n)} &= c (\mu_s c)^n e^{-\mu_s c t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) \times \\ &\times f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \sum_{k=0}^n (\hat{\mathbf{s}}_k)_i (t_{k+1} - t_k) \sum_{l=0}^n (\hat{\mathbf{s}}_l)_j (t_{l+1} - t_l). \end{aligned} \quad (\text{A.208})$$

Учтем, что

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n A_{kl} = 2 \sum_{k<l} A_{kl} + \sum_{k=l} A_{kk}. \quad (\text{A.209})$$

Учитывая это преобразование, и проделывая аналогичные вычисления, какие были в прошлом пункте, получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \rangle &= - \frac{2}{3(\mu'_s)^2 (1+g)g} (g(g+2 + \mu_s c t (g^2 - 1)) - (1+g)^2 e^{-\mu'_s c t} + e^{-\mu''_s c t}) \delta_{ij} \\ &+ \frac{2}{(\mu'_s)^2 (1+g)g} (g - (1+g) e^{-\mu'_s c t} + e^{-\mu''_s c t}) \hat{\mathbf{s}}_{0i} \hat{\mathbf{s}}_{0j}. \end{aligned} \quad (\text{A.210})$$

A.11 Двумерная задача переноса

Рассмотрим двумерную задачу переноса. В этом случае вектор $\mathbf{r} = (x, y)$ и $\hat{\mathbf{s}} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Уравнение переноса в двух измерениях принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial l} + \hat{\mathbf{s}} \nabla \right) L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}) = \mu_s \int_{\mathbf{S}^1} d\varphi_1 p_g^{2D}(\varphi) L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}_1). \quad (\text{A.211})$$

Вместо направления мы можем рассмотреть комплексный параметр $z = e^{i\varphi}$. Предполагая функцию $L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}})$ хорошей (ради простоты будем предполагать, что она не имеет полюсов, их наличие усложнит конечную формулу), мы можем написать:

$$\mu_s \int_{\mathbb{S}^1} d\varphi_1 p_g^{2D}(\varphi) L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}_1) = \mu_s L(\mathbf{r}, l, gz). \quad (\text{A.212})$$

Это следует из того, что двумерная функция Хеньи-Гринштейна имеет два полюса в точках $z = gz_0$ и $z = z_0/g$. Тогда изначальная задача примет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial l} + z \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right) L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}) = \mu_s L(\mathbf{r}, l, gz), \quad (\text{A.213})$$

где введены обозначения $\alpha = x + iy$ и $\bar{\alpha} = x - iy$.

На основании этого уравнения, можно написать новую схему для итерационного решения:

$$L^{(n)}(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}) = \int_0^l dl_1 L^{(n-1)}(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{s}}(l - l_1), l, g\hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{A.214})$$

A.12 Многомерная задача переноса

Рассмотрим n -мерную задачу переноса, где $n \geq 2$. Уравнение переноса в этом случае принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial l} + \hat{\mathbf{s}} \nabla \right) L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}) = \mu_s \int_{\mathbb{S}^1} d\hat{\mathbf{s}}_1 p_g^{nD}(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}) L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}_1). \quad (\text{A.215})$$

Заметим, что функцию Хеньи-Гринштейна мы можем переписать в следующем виде:

$$p_g^{nD}(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}) = A_n |g\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_1|^{-n}. \quad (\text{A.216})$$

Вспомним формулу Пуассона для задачи Лапласа в шаре. Итак, если гармоническая функция $u(\mathbf{x})$ совпадает на сфере $\mathbb{S}(0, r)$ с функцией $f(x)$, то в шаре $\mathbb{B}(0, r)$ функция $u(\mathbf{x})$ выражается следующей формулой:

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\mathbb{S}(0, r)} f(\mathbf{y}) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n} dS(\mathbf{y}) \quad (\text{A.217})$$

Мы можем написать, что для уравнения переноса $|\mathbf{x}| = |g\hat{\mathbf{s}}| = g$, $r = 1$ и $dS(\mathbf{y}) = d\hat{\mathbf{s}}$. Тогда

$$u(g\hat{\mathbf{s}}) = \frac{1-g^2}{n\alpha(n)} \int_{\mathbb{S}(0,1)} f(\hat{\mathbf{s}}) |g\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_1|^{-n} d\hat{\mathbf{s}}_1 \quad (\text{A.218})$$

Выберем в качестве функции f решение уравнения переноса. Обозначим $u(\mathbf{r}, l, \mathbf{p})$ продолжение решения уравнения переноса. В итоге приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial l} + \hat{\mathbf{s}}\nabla \right) u(\mathbf{r}, l, \mathbf{p}) = \mu'_s u(\mathbf{r}, l, g\mathbf{p}) \\ \Delta_{\mathbf{p}} u(\mathbf{r}, l, \mathbf{p}) = 0 \\ L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}) = u(\mathbf{r}, l, \mathbf{p})|_{|\mathbf{p}|=1} \end{cases} \quad (\text{A.219})$$

Здесь $\mu'_s = \mu_s \frac{A_n n \alpha(n)}{1-g^2}$. Таким образом, решение задачи переноса в классе гармонических функций можно искать с помощью системы уравнений (A.219).

A.13 Симметрии в трехмерной задаче переноса

Каждый порядок рассеяния имеет свои собственные симметрии относительно растяжения пространственной оси (гомотетии) и относительно растяжения оси длин волн. Получим эти симметрии. Для начала рассмотрим полное выражение потока для n -го порядка:

$$\begin{aligned} \delta L^{(n)} &= (\mu_s c)^n e^{-c\mu_s t} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\times c \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.220})$$

Будет удобнее работать со следующей функцией:

$$\delta G^n(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}) = e^{\mu_s c t} \delta L^n(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{s}}). \quad (\text{A.221})$$

Явное выражение для этой функции имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta G^{(n)} &= (\mu_s c)^n \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\times c \delta^3(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i (t_{i+1} - t_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.222})$$

Распишем явно у вектора положения модуль и направление:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{n} \quad (\text{A.223})$$

Покажем, что

$$\delta G^{(n)}(\alpha r \mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \alpha^{n-3} \delta G^{(n)}(r \mathbf{n}, \frac{t}{\alpha}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (\text{A.224})$$

Действительно, вектор \mathbf{r} встречается только в дельта-функции. А она преобразуется по следующему правилу:

$$\delta^3(\alpha r \mathbf{n} - ct \hat{\mathbf{s}}^{(n)}) = \frac{1}{\alpha^3} \delta^3(r \mathbf{n} - \frac{ct}{\alpha} \hat{\mathbf{s}}^{(n)}). \quad (\text{A.225})$$

Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \delta G^{(n)}(\alpha r \mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= \frac{(\mu_s c)^n}{\alpha^3} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}} dt_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\times c \delta^3 \left(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i \left(\frac{t_{i+1}}{\alpha} - \frac{t_i}{\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.226})$$

Деля каждую подынтегральную переменную на альфа, получаем:

$$\begin{aligned} \delta G^{(n)}(\alpha r \mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}) &= \frac{(\mu_s c \alpha)^n}{\alpha^3} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^{t_{i+1}/\alpha} \frac{dt_i}{\alpha} \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbf{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_j f(\hat{\mathbf{s}}_{j+1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_j) \right) f(\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ &\times c \delta^3 \left(\mathbf{r} - c \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{s}}_i \left(\frac{t_{i+1}}{\alpha} - \frac{t_i}{\alpha} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.227})$$

Заметим, что в последней формуле теперь вместо t присутствует переменная t/α . Таким образом, имеем:

$$\delta G^{(n)}(\alpha r \mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}) = \alpha^{n-3} \delta G^{(n)}(r \mathbf{n}, \frac{t}{\alpha}, \hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{A.228})$$

Переводя эту симметрию на функции $\delta L^{(n)}(r\mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}})$, получаем, что:

$$\delta L^{(n)}(\alpha r\mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}) = e^{-\mu_t ct \frac{\alpha-1}{\alpha}} \alpha^{n-3} \delta L^{(n)}(r\mathbf{n}, \frac{t}{\alpha}, \hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{A.229})$$

Еще раз уточним, что так как каждый порядок преобразуется по своему закону, то данная симметрия не является общей симметрией для всего решения, так как каждая компонента решения преобразуется по-разному.

Аналогичным образом, можно получить формулы преобразования при смене длины волны:

$$\delta G^{(n)}(r\mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}|\lambda_2) = \frac{n(\lambda_2)}{n(\lambda_1)} \left(\frac{k(\lambda_2)n(\lambda_1)}{k(\lambda_1)n(\lambda_2)} \right)^n \delta G^{(n)}(r\mathbf{n}, \frac{n(\lambda_1)}{n(\lambda_2)}t, \hat{\mathbf{s}}|\lambda_1) \quad (\text{A.230})$$

где $n(\lambda)$ — показатель преломления в среде и функция $k(\lambda)$ описывает зависимость обратной длины рассеяния от длины волны. Эта симметрия также не является точной.

Также существует очевидная точная симметрию всего ряда рассеяния (полного решения), которая получается при действии некоторой матрицей поворота \hat{R} на вектор координаты:

$$\delta G^{(n)}(r\hat{R}\mathbf{n}, t, \hat{\mathbf{s}}|\hat{\mathbf{s}}_0) = \delta G^{(n)}(r\mathbf{n}, t, \hat{R}^{-1}\hat{\mathbf{s}}|\hat{R}^{-1}\hat{\mathbf{s}}_0) \quad (\text{A.231})$$

A.14 Z-факторный метод для задачи переноса

В этой главе мы получим альтернативный и более эффективный метод численного решения задачи переноса, дающий улучшенную сходимость. Запишем уравнение на функцию $G(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}) = e^{\mu_t l} L(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}})$:

$$\frac{\partial G}{\partial l} + \hat{\mathbf{s}} \nabla G = \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}) G(\mathbf{r}, l, \hat{\mathbf{s}}_1). \quad (\text{A.232})$$

Схема последовательных приближений дает в аналитическом виде выражения для потока света без рассеяния G_0 и для потока света с одним порядком рассеяния G_1 . Оба вклада сингулярные (первый лежит на прямой траектории света, а второй лежит в плоскости рассеяния). Построим уравнение, которое не будет содержать этой сингулярности.

Будем искать решение в виде $G = G_{reg} + G_0 + G_1$, где $G_{0,1}$ — решения для нулевого порядка и первого порядка рассеяний, G_{reg} — функция, содержащая все остальные порядки рассеяния. Тогда на новую функцию G_{reg} мы получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial G_{reg}}{\partial l} + \hat{s} \nabla G_{reg} = \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{s}_1 p_g(\hat{s}_1, \hat{s}) G_{reg}(\mathbf{r}, l, \hat{s}_1) + S_2(\mathbf{r}, l, \hat{s}), \quad (\text{A.233})$$

где $S_2(\mathbf{r}, l, \hat{s})$ — новый источник, полученный после учета одного рассеяния. Эта функция имеет следующий вид:

$$S_2(\mathbf{r}, \hat{s}, l) = \frac{2\mu_s^2}{|\mathbf{r} - \hat{s}_0 l|^2} p_g(\hat{s}, \hat{s}_*) p_g(\hat{s}_*, \hat{s}_0) \Theta(l - r), \quad (\text{A.234})$$

$$\hat{s}_* = \hat{s}_0 + 2 \frac{\mathbf{r} - \hat{s}_0 l}{|\mathbf{r} - \hat{s}_0 l|^2} (l - (\mathbf{r}, \hat{s}_0)).$$

Заметим, что уравнение на G_{reg} имеет нулевые начальные условия.

Теперь воспользуемся Z-факторным методом. Предположим, что

$$V_{\hat{s}\hat{s}'} G_{reg} = Z(\mathbf{r}, l, \hat{s}) G_{reg}. \quad (\text{A.235})$$

Тогда уравнение (A.233) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial G_{reg}}{\partial l} + \hat{s} \nabla G_{reg} = \mu_s Z G_{reg} + S_2. \quad (\text{A.236})$$

Решим это уравнение методом характеристик. Найдем характеристики этого уравнения C_1, C_2, \dots, C_n . Тогда полное решение можно записать в виде $F(C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

Характеристики подчиняются следующим уравнениям:

$$\frac{dl}{1} = \frac{dx}{\hat{s}_x} = \frac{dy}{\hat{s}_y} = \frac{dz}{\hat{s}_z} = \frac{dG_{reg}}{\mu_s G_{reg} Z + S_2}. \quad (\text{A.237})$$

Первая характеристика имеет вид $C_1 = \mathbf{r} - \hat{s}l$. Перепишем ее в виде следующего вида: $\mathbf{r} = C_1 + \hat{s}l$. Вторую характеристику можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{dl}{1} = \frac{dG_{reg}}{\mu_s G_{reg} Z(\mathbf{r}(l), l, \hat{s}) + S_2(\mathbf{r}(l), l, \hat{s})}. \quad (\text{A.238})$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dG_{reg}}{dl} = \mu_s G_{reg} Z(C_1 + \hat{s}l, l, \hat{s}) + S_2(C_1 + \hat{s}l, l, \hat{s}). \quad (\text{A.239})$$

Ищем решение этого уравнения в следующем виде:

$$G_{reg} = C(l) \exp \left(\mu_s \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{C}_1 + \hat{s}l_1, l_1, \hat{s}) \right). \quad (\text{A.240})$$

Подставляя этот анзац в уравнение для второй характеристики, и решая простое уравнение, находим:

$$\begin{aligned} G_{reg}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) &= \int_0^l dl_1 S_2(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) \times \\ &\times \exp \left(\mu_s \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) - \mu_s \int_0^{l_1} d\eta Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l_1 - \eta), \eta, \hat{s}) \right) \\ &+ C_0 \exp \left(\mu_s \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) \right) = C_0 M(\mathbf{r}, l, \hat{s}) + N(\mathbf{r}, l, \hat{s}). \end{aligned} \quad (\text{A.241})$$

Вторая характеристика принимает следующий вид: $C_0 = (G_{reg} - N)/M$. Полное решение можно записать в виде $F(C_0, \mathbf{C}_1) = 0$ или же $C_0 = \alpha(\mathbf{C}_1)$. В итоге можно написать $A = M\alpha(\mathbf{C}_1) + N$. Также учтем начальное условие: $\lim_{l \rightarrow 0} G_{reg}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = 0$.

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} M &= \lim_{l \rightarrow 0} \exp \left(\mu_s \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) \right) = 1, \\ \lim_{l \rightarrow 0} N &= \lim_{l \rightarrow 0} \int_0^l dl_1 S_2(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) \times \\ &\times \exp \left(\mu_s \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) - \mu_s \int_0^{l_1} d\eta Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l_1 - \eta), \eta, \hat{s}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.242})$$

Отсюда находим, что $0 = \alpha(\mathbf{r})$. Значит, полное решение имеет следующий вид:

$$G_{reg}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = N(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = \int_0^l dl_1 S_2(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) \times \exp \left(\mu_s \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) - \mu_s \int_0^{l_1} d\eta Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l_1 - \eta), \eta, \hat{s}) \right). \quad (\text{A.243})$$

Введем новые переменные интегрирования (ξ_1, ξ_2) по следующему правилу:

$$\begin{aligned} l_1 &= l(1 - \xi_1), \\ \eta &= l_1(1 - \xi_2) = l(1 - \xi_1)(1 - \xi_2). \end{aligned} \quad (\text{A.244})$$

Тогда интегралы в экспоненты преобразуются по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) &= l \int_0^1 d\xi_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_1, l(1 - \xi_1), \hat{s}) \\ &= l \int_0^1 d\xi_2 Z(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_2, l(1 - \xi_2), \hat{s}), \end{aligned} \quad (\text{A.245})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} d\eta Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l_1 - \eta), \eta, \hat{s}) &= l(1 - \xi_1) \int_0^1 d\xi_2 Z(\mathbf{r} - \hat{s}l(1 - \xi_1)\xi_2, l(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \hat{s}) \\ &= l' \int_0^1 d\xi_2 Z(\mathbf{r} - \hat{s}l'\xi_2, l'(1 - \xi_2), \hat{s}) \end{aligned} \quad (\text{A.246})$$

Здесь $l' = l(1 - \xi_1)$. Определим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta Z &= \int_0^l dl_1 Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l - l_1), l_1, \hat{s}) - \int_0^{l_1} d\eta Z(\mathbf{r} - \hat{s}(l_1 - \eta), \eta, \hat{s}) \\ &= \int_0^1 d\xi_2 D(\mathbf{r}, l, l', \xi_2, \hat{s}), \end{aligned} \quad (\text{A.247})$$

где

$$D(\mathbf{r}, l, l', \xi_2, \hat{s}) = lZ(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_2, l(1 - \xi_2), \hat{s}) - l'Z(\mathbf{r} - \hat{s}l'\xi_2, l'(1 - \xi_2), \hat{s}). \quad (\text{A.248})$$

Итак, в итоге получаем:

$$G_{reg}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = l \int_0^1 d\xi_1 S_2(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_1, l(1 - \xi_1), \hat{s}) \exp(\mu_s \int_0^1 d\xi_2 D(\mathbf{r}, l, l', \xi_2, \hat{s})). \quad (\text{A.249})$$

Таким образом, получаем следующую численную схему:

– рассчитываем функцию

$$Z^{(n+1)} = \frac{V_{\hat{s}\hat{s}_1} G_{reg}^{(n)}}{G_{reg}^{(n)}}, \quad (\text{A.250})$$

– рассчитываем

$$D^{(n+1)}(\mathbf{r}, l, l', \xi_2, \hat{s}) = lZ^{(n+1)}(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_2, l(1 - \xi_2), \hat{s}) - l'Z^{(n+1)}(\mathbf{r} - \hat{s}l'\xi_2, l'(1 - \xi_2), \hat{s}), \quad (\text{A.251})$$

– обновляем наше приближение:

$$G_{reg}^{(n+1)}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = l \int_0^1 d\xi_1 S_2(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_1, l(1 - \xi_1), \hat{s}) \exp(\mu_s \int_0^1 d\xi_2 D^{(n+1)}). \quad (\text{A.252})$$

В качестве начального приближения $G_{reg}^{(0)}$ возьмем следующую функцию:

$$G_{reg}^{(0)}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = \int_0^l d\eta S_2(\mathbf{r} - \hat{s}(l - \eta), \eta, \hat{s}) = l \int_0^1 d\xi_3 S_2(\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_3, l(1 - \xi_3), \hat{s}). \quad (\text{A.253})$$

Она получается, если в схему, описанную выше, подставить приближение $G_{reg}^{(0)} = 0$. Подставляя сюда функцию $S_2(\mathbf{r}, l, \hat{s})$, получим:

$$G_{reg}^{(0)}(\mathbf{r}, l, \hat{s}) = 2\mu_s^2 l \int_0^1 d\xi_3 \frac{p_g(\hat{s}, \hat{s}_*^l) p_g(\hat{s}_*^l, \hat{s}_0)}{|\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_3 - \hat{s}_0 l(1 - \xi_3)|} \Theta(l - |\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_3|^2), \quad (\text{A.254})$$

где

$$\hat{s}_*^l = \hat{s}_0 + 2 \frac{\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_3 - \hat{s}_0 l}{|\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_3 - \hat{s}_0 l|^2} (l - (\mathbf{r} - \hat{s}l\xi_3, \hat{s}_0)). \quad (\text{A.255})$$

Тогда получим, что

$$Z^{(1)} = \int_{\mathbb{S}} d\hat{s}' p_g(\hat{s}, \hat{s}') G_{reg}^{(0)}(\mathbf{r}, l, \hat{s}') / G_{reg}^{(0)}(\mathbf{r}, l, \hat{s}). \quad (\text{A.256})$$

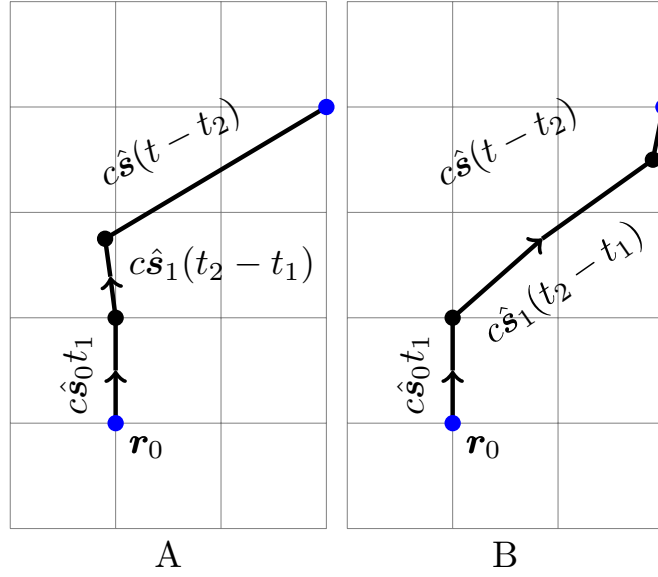


Рисунок А.12 — Две возможных траектории для рассеяния второго порядка в приближении малых углов рассеяния

А.15 Приближенные формулы для интегрального потока

Выражение для $\Phi^{(0)}$ и $\delta\Phi^{(1)}$ являются аналитическими. Получим приближения для второго и высших порядков рассеяния. Общее выражение для второго порядка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(2)} = & ce^{-\mu_i ct} (\mu_s c)^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ & \times \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1). \end{aligned} \quad (\text{A.257})$$

В первом приближении (рис. 1А) выполняется соотношение $\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0$. Тогда выражение для интегрального потока принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_A^{(2)} = & ce^{-\mu_i ct} (\mu_s c)^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ & \times \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_0(t_2)). \end{aligned} \quad (\text{A.258})$$

Теперь подынтегральная функция больше не зависит от переменной $\hat{\mathbf{s}}_1$ и переменной t_1 и мы можем снять этот интеграл по этим переменным:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_A^{(2)} = & ce^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^2 \int_0^t dt_2 t_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} p_{g^2}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ & \times \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2). \end{aligned} \quad (\text{A.259})$$

Раскрываем дельта функцию по следующему правилу:

$$\delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2) = \frac{2}{c|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \delta^2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}^*) \delta(t_2 - t_2^*), \quad (\text{A.260})$$

$$\hat{\mathbf{s}}^* = \hat{\mathbf{s}}_0 + 2 \frac{\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} (ct - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0), \quad (\text{A.261})$$

$$t_2 = t_2^* = \frac{c^2 t^2 - \mathbf{r}^2}{2c(c\hat{\mathbf{s}}_0 t - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)}. \quad (\text{A.262})$$

Таким образом мы приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_A^{(2)} = & 2e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s c)^2}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} t_2^* p_{g^2}(\hat{\mathbf{s}}^*, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ & \times H((ct)^2 - \mathbf{r}^2) H(ct - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0). \end{aligned} \quad (\text{A.263})$$

Теперь рассмотрим приближение В. В нем выполняется равенство $\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}$. Тогда выражение для интегрального потока принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_B^{(2)} = & ce^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_1) p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ & \times \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0(t_1)). \end{aligned} \quad (\text{A.264})$$

Снимая интегралы по переменным, от которых не зависит подынтегральная функция, имеем:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_B^{(2)} = & ce^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} p_{g^2}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \times \\ & \times \delta^3(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0(t_1)). \end{aligned} \quad (\text{A.265})$$

Этот интеграл берется точно так же как и в приближении $\delta\Phi_A^{(2)}$. Объединяя эти два результата знаком минус, получаем:

$$\delta\Phi^{(2)} = \delta\Phi_A^{(2)} - \delta\Phi_B^{(2)} = \frac{c\mu_s^2 e^{-\mu_t ct}}{2} \frac{f_{g^2}(\hat{\mathbf{s}}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)}{ct - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0} \left(1 - \frac{r(ct - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \right) H(t - r/c). \quad (\text{A.266})$$

Заметим, что здесь знак перед вкладками соответствует полной эмпирике и не берется из каких-то физических соображений.

Теперь разберем третий порядок. Здесь важны три вклада:

1. $\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}}$.
2. $\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0$ и $\hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}}$.
3. $\hat{\mathbf{s}}_0 = \hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_2$.

Все эти три вклада отличаются лишь точкой траектории, где происходит ее изгиб (сначала направления идут близко, потом искривляются в сторону точки \mathbf{r}). Общее выражение для третьего порядка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(3)} &= e^{-\mu_s ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2) p_g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) \\ &\quad \times p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) - c\hat{\mathbf{s}}_2(t_3 - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_1(t_2 - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1). \end{aligned} \quad (\text{A.267})$$

Посчитаем каждый вклад по отдельности. Первый вклад:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1, \quad (\text{A.268})$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(3)} &= e^{-\mu_s ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \\ &\quad \times p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2) p_g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1) \\ &= e^{-\mu_s ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1). \end{aligned} \quad (\text{A.269})$$

Проводя интегрирование, получаем:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(3)} &= 2e^{-\mu_s ct} \frac{(\mu_s c)^3}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \Theta(t_2 - r/c) \\ &= 2e^{-\mu_s ct} \frac{(\mu_s c)^3}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \int_0^t dt_3 (t_3 - r/c) \\ &= 2e^{-\mu_s ct} \frac{(\mu_s c)^3}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} t(t/2 - r/c) p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \Theta(t - r/c). \end{aligned} \quad (\text{A.270})$$

Второй вклад:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2, \quad (\text{A.271})$$

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(3)} &= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \\
&\quad \times p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2) p_g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2) \\
&= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 t_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_2) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_2).
\end{aligned} \tag{A.272}$$

Проводя интегрирование, получаем:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(3)} &= 2e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s c)^3}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \int_0^t dt_3 t_* \Theta(t_3 - r/c) \\
&= 2e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s c)^3}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} t_* (t - r/c) p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \Theta(t - r/c).
\end{aligned} \tag{A.273}$$

Наконец, третий вклад:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_3, \tag{A.274}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(3)} &= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \\
&\quad \times p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_2) p_g(\hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_1) p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_3) \\
&= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^3 \int_0^t dt_3 \frac{t_3^2}{2} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_3) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_3).
\end{aligned} \tag{A.275}$$

Проводя интегрирование, получаем:

$$\delta\Phi^{(3)} = 2e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s c)^3}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \frac{t_*^2}{2} p_{g^3}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \Theta(t - r/c), \tag{A.276}$$

где

$$t_* = \frac{c^2 t^2 - r^2}{2c(ct - (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}_0))}, \tag{A.277}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_* = \hat{\mathbf{s}}_0 - 2 \frac{(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t, \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} (\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t). \tag{A.278}$$

Суммируя эти вклады знакопеременным образом, получаем приближение третьего порядка.

Теперь рассмотрим случай произвольного порядка n и пусть точка изгиба траектории выбрана на месте k (k изменяется от 1 до n). Это означает, что $\hat{\mathbf{s}}_{k-1} = \dots = \hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_0$ и $\hat{\mathbf{s}}_k = \hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \dots = \hat{\mathbf{s}}$. В этом случае верно, что

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_k) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_k. \quad (\text{A.279})$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_k^{(n)} &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_{n-1} \dots \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}}_1 \\ &\times p_g(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_{n-1}) p_g(\hat{\mathbf{s}}_{n-1}, \hat{\mathbf{s}}_{n-2}) \dots p_g(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_k) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_k). \end{aligned} \quad (\text{A.280})$$

Посчитаем этот интеграл:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_k^{(n)} &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_{k+1}} dt_k \frac{t_k^{k-1}}{(k-1)!} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{s}} \\ &\times p_g^n(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}_0) \delta(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}(t - t_1) - c\hat{\mathbf{s}}_0 t_1) \\ &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_{k+2}} dt_{k+1} \Theta(t_{k+2} - r/c) \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \frac{p_g^n(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \\ &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \int_0^t dt_n \dots \int_{r/c}^{t_{k+2}} dt_{k+1} \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \frac{p_g^n(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \\ &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \left(\int_0^t dt_n \dots \int_0^{t_{k+2}} dt_{k+1} - \int_0^t dt_n \dots \int_0^{r/c} dt_{k+2} \right) \\ &\times \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} p_g^n(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2 \\ &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \left(\frac{t^{n-k}}{(n-k)!} - r/c \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right) \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \frac{p_g^n(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \\ &= e^{-\mu_t c t} (\mu_s c)^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 - (n-k) \frac{r}{ct} \right) \frac{p_g^n(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0)}{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2} \Theta(t - r/c). \end{aligned} \quad (\text{A.281})$$

Теперь надо просуммировать это выражение по k . Будем суммировать с относительной фазой $(-1)^k$. Стоит уточнить, что данная фаза не следует из физических

соображений. В дальнейшем окажется, что данное суммирование дает результат, близкий к численным результатам. Произведем суммирование:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(n)} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \delta\Phi_k^{(n)} = \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\times \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 - (n-k) \frac{r}{ct}\right) p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \Theta(t - r/c) \\
&= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^n p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \Theta(t - r/c) \\
&\times \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 - (n-k) \frac{r}{ct}\right) \\
&= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^n p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \Theta(t - r/c) \\
&\times \left(1 - n \frac{r}{ct}\right) \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^n p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \Theta(t - r/c) \left(\frac{r}{ct}\right) \\
&\times \sum_{k=1}^n (-1)^k k \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{t_*^{k-1}}{(k-1)!}.
\end{aligned} \tag{A.282}$$

Сворачивая сумму, получаем:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(n)} &= e^{-\mu_t ct} (\mu_s c)^n p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \frac{\Theta(t - r/c)}{(n-1)!} \\
&\times \left(\left(1 - n \frac{r}{ct}\right) \cdot (t - t_*)^{n-1} + \frac{r}{ct} \cdot (t - t_*)^{n-2} (t - nt_*) \right),
\end{aligned} \tag{A.283}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(n)} &= e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s c)^n (t - t_*)^{n-2}}{(n-1)!} (\mu_s c)^n p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \\
&\times \Theta(t - r/c) \left(\left(1 - n \frac{r}{ct}\right) \cdot (t - t_*) + \frac{r}{ct} \cdot (t - nt_*) \right),
\end{aligned} \tag{A.284}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{(n)} &= e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s c)^n (t - t_*)^{n-1}}{(n-1)!} p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) / |(\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t)|^2 \\
&\times \Theta(t - r/c) \left(1 - (n-1) \frac{r}{c(t - t_*)} \right).
\end{aligned} \tag{A.285}$$

Теперь учтем, что

$$t - t_* = \frac{|\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^2}{2c(ct - (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}_0))}. \tag{A.286}$$

Учитывая это, получаем:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(n)} &= 2e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s/2)^n |\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^{2(n-2)}}{(ct - (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}_0))^{n-1} (n-1)!} p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &\times \Theta(t - r/c) \left(1 - (n-1) \frac{r}{c(t - t_*)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.287})$$

Это и есть формула, описывающая приближенное решение. Однако данная формула хорошо работает только для $n \leq 2$. При больших порядках наблюдаются расхождения, но верна следующая аппроксимация:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(n)} &= 2e^{-\mu_t ct} \frac{(\mu_s/2)^n |\mathbf{r} - c\hat{\mathbf{s}}_0 t|^{2(n-2)}}{(ct - (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}_0))^{n-1} (n-1)!} p_{g^n}(\hat{\mathbf{s}}_*, \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &\times \Theta(t - r/c) \left(1 - (n-1) \frac{r}{c(t - t_*)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.288})$$

где параметр n_f подбирается эмпирически. Стоит отметить, что при больших значениях n параметр n_f стремится к 0.