

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА»

Филиал в г. Дубна



Бородин Никита Святославович

**Спин-орбитальные эффекты в распадах
(псевдо)скалярных частиц и дифракция закрученных
квантовых состояний**

Направление 03.04.02 —

«Физика элементарных частиц»

Магистерская работа

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Наумов Дмитрий Вадимович

Дубна — 2026

Оглавление

	Стр.
Глава 1. Введение	4
Введение	4
1.1 Что такое закрученные состояния?	4
1.2 Какие они бывают?	4
1.3 Обзор теоретических методов	5
1.4 Обзор методов закручивания	6
1.5 Обзор экспериментов	7
1.6 Приложения в области физики частиц и высоких энергий	7
Глава 2. Новый метод экспериментального определения закрученности	10
2.1 Уравнение Шредингера в цилиндрических координатах	10
2.2 Дифракция на щели. Общий метод с функциями Грина	12
2.3 Аналитическое решение для тонкой круговой и треугольной щелей	13
2.4 Численное моделирование с помощью FFT. Анализ масок.	14
2.5 Аналитические выражения для треугольной маски	16
2.6 Обсуждение результатов.	18
Глава 3. Спин-орбитальное состояние пары фермион-антифермион в распаде (псевдо)скалярной частицы	21
3.1 Лагранжиан. Определения	21
3.2 Ширина распада для $H \rightarrow f + \bar{f}$	22
3.3 Волновая функция в импульсном и координатном представлениях	24
3.4 Псевдоскалярный случай	27
3.5 Смешанный случай	29
3.6 Обсуждение результатов	31

	Стр.
Заключение	33
Список литературы	35
Список рисунков	40

Глава 1. Введение

1.1 Что такое закрученные состояния?

Классические и квантовые волны могут образовывать вихрь - фронт волны с геликоидной фазой и с циркулирующими плотностями тока. Эти свойства определяют орбитальный угловой момент (ОУМ) переносимый локализованными закрученными состояниями. За последние два десятилетия, закрученные состояния стали неотъемленной частью оптики. В последнее десятилетие, было обнаружено, что закрученные пучки могут возникать в свободных волнах электронов и ионов.

Спиновый орбитальный момент для фотона (СУМ) - проекция $\hbar m_s$, принимает значения $m_s = \pm 1$, проекция ОУМ - $\hbar m_l$ принимает значения $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Проекция полного орбитального момента $\hbar m = \hbar m_s + \hbar m_l$.

1.2 Какие они бывают?

Существует два основных случая вращения: если каждый вектор поляризации вращается, то у света есть спин; если вращается фазовая структура, то у света есть ОУМ, который может быть много больше спина. Воспользовавшись этим, пучки можно классифицировать по природе углового момента и по типу волнового фронта:

1. **Состояния со спиновым угловым моментом (СУМ):** возникают за счет вращения вектора поляризации. Проекция $\hbar m_s$, принимает значения $m_s = \pm 1$.
2. **Состояния с орбитальным угловым моментом (ОУМ):** возникают из-за вращения фазовой структуры. В отличии от спина, значение $\hbar m_l$ теоретически неограничено и принимает значения $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

3. Гибридные состояния: спиновое и орбитальное взаимодействие взаимосвязаны. В таких пучках поляризация неоднородна по сечению.

Также закрученные состояния классифицируют по типу носителя: они быть как безмассовыми (фотонами), так и массивными (электроны и ионы).

1.3 Обзор теоретических методов

Для моделирования закрученных пучков отдают предпочтение 2м типам: пучкам Бесселя и Лаггера-Гаусса. Пучок Бесселя с азимутальным квантовым числом ℓ и продольным импульсом k_z определяется как [1; 2]:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = J_{|\ell|}(\kappa\rho)e^{im\varphi}e^{ik_z z}, \quad \kappa = \frac{p_\perp}{h} \quad (1.1)$$

где $J_{|\ell|}$ - функция Бесселя 1го рода; κ - поперечный момент. Такой пучок переносит ОУМ $\langle L_z \rangle = \hbar m$. Из-за того, что $J_{|m|} \sim x^{-\frac{1}{2}}$ в асимптотике, поперечная норма расходится и такие состояния не являются физически нормируемыми. Однако, они хорошо отражают структуру пучка рядом с осью, а также используются для аналитических вычислений в теории дифракции.

Чтобы описать физические состояния с ОУМ используются Лаггер-Гауссовы пучки - точные квадратично интегрируемые решения уравнения Клейна-Гордона для свободных частиц с определенной средней энергией и угловым моментом. Лаггер-Гауссов пучок определяется как [3]:

$$\begin{aligned} \psi_{ml,n}^{\text{LG}}(\rho, \varphi, t) = & \mathcal{N} \rho^{|m|} \left[\frac{1}{\sigma_\perp(t)} \right]^{|m|+1} L_n^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{\sigma_\perp^2(t)} \right) e^{im\varphi} \\ & \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_\perp^2(t)} \left(1 - i \frac{t}{t_d} \right) \right] \\ & \times \exp \left[-iM \arctan \left(\frac{t}{t_d} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

где нормировка

$$\int_0^\infty d\rho \rho = \int_0^{2\pi} d\varphi |\psi_{\ell,n}(\rho, \varphi, t)|^2 = 1 \quad (1.3)$$

1.4 Обзор методов закручивания

Можно классифицировать методы закручивания Змя типами:

1. Пучки с сингулярностью на оси в лазерах:

Естественная генерация в резонаторах [4].

2. Преобразование плосковолновых пучков: Спиральные фазовые пластинки: Прозрачные элементы, оптическая толщина которых линейно возрастает по азимуту [5]. Дифракционные оптические элементы и голограммы:

- **Вилочные голограммы:** при дифракции на них плоской волны формируется множество закрученных пучков [6].
- **Компьютерно-генерированные голограммы:** позволяют формировать пучки с любым амплитудно-фазовым распределением [7].
- **Пространственные модуляторы света:** используются для динамического управления фазой [7].
- **Металповерхности и антенные решетки:** применяются в терагерцовом диапазоне (V-образные антенны) [8].

3. Генерация с помощью свободных электронов:

Лазеры на свободных электронах: Генерация пучков терагерцовых закрученных фотонов [9].

Спиральные ондуляторы: Релятивистские электроны в ондуляторе излучают закрученные фотоны на гармониках [10; 11]. Это эффективный метод для рентгеновского диапазона.

Обратное комптоновское рассеяние: Теоретически показано [12], что при рассеянии на ультрарелятивистских электронах можно получать фотоны высоких энергий (до ГэВ).

Взаимодействие электронных пучков с лазером: Схемы с приобретением электронами геликоидальной структуры [13].

1.5 Обзор экспериментов

Экспериментальные исследования прошли путь от фундаментальных демонстраций передачи момента импульса до создания мощные специализированных источников в различных диапазонах спектра.

1. **Эксперимент Бета (1936 г.):** Первая экспериментальная демонстрация передачи механического момента импульса от циркулярно поляризованного света (СУМ) подвешенной четвертьволновой пластинке [14].
2. **Работа Аллена и др. (1992 г.):** Фундамент современных исследований, предложила методы трансформации лазерных мод (Лагерра-Гаусса) для получения пучков с орбитальным угловым моментом (ОУМ)[3].
3. **Вращение микрочастиц:** В экспериментах было показано, что закрученные фотоны способны вызывать вращение поглощающих их микрочастиц, при этом направление вращения определяется значением ОУМ [15].
4. **Новосибирский лазер на свободных электронах (ЛСЭ):** Проведены эксперименты по генерации монохроматических пучков в терагерцовом диапазоне (длина волны 140 мкм). Доказано сохранение структуры пучков (инвариантность поперечного сечения) на значительных расстояниях [16; 17].
5. **Спиральные ондуляторы (BESSY-II):** Получены закрученные фотоны рентгеновского диапазона (99 еВ) на второй гармонике излучения релятивистских электронов [18].

1.6 Приложения в области физики частиц и высоких энергий

Закрученные пучки с оптическим вихрем вдоль оси могут вращать микроскопические объекты – свет физически толкает объект по спирали [19]; пучки могут помочь с дистанционным вращением объектов, используя вращательный эффект Доплера [20]; фотоны с разной степенью закрутки

можно использовать как независимые каналы в одном луче для передачи данных в оптоволокне [21]; использование фазовой маски с вихрем в микроскопии позволяет контрастно выделять границы объекта [22]; закрученные состояния позволяют создать многомерные квантовые состояния [23].

В последнее время начало развиваться новое применение закрученных состояний, теперь в физике элементарных частиц и высоких энергий [24]. В данной работе представлено описание естественного возникновения закрученных состояний в распаде скалярной частицы на фермион-антифермионную пару ($H \rightarrow f\bar{f}$).

Объект исследования: Закрученные состояния массивных фермионов и процессы их генерации в распадах элементарных частиц и их дифракционное взаимодействие с макроскопическими апертурами.

Предмет исследования: Теоретическое описание процесса распада скалярной частицы на закрученные фермион-антифермионные пары и методы численного моделирования дифракционных картин как инструмента для измерения параметров этих состояний.

Целью данной работы является исследование квантовомеханической структуры закрученных состояний фермионных пар в распадах скалярных частиц и поиск наблюдаемых эффектов этих состояний в угловых и спиновых корреляциях, разработка и численный анализ методов их экспериментального определения с использованием дифракции на апертурах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Провести теоретический анализ дифракции закрученных состояний на круговой и треугольной апертурах в рамках формализма Кирхгофа-Френеля.
2. Применить метод численного моделирования (SSFM) для анализа эволюции волновой функции закрученных состояний при прохождении через дифракционные маски.
3. Исследовать чувствительность дифракционных картин к величине и знаку орбитального углового момента (ОУМ) для различных конфигураций апертур.
4. Вывести выражение для волновой функции пары фермион-антифермион, используя формализм S-матричных амплитуд для двухчастичных распадов.

5. Осуществить переход в координатное пространство с помощью трехмерного преобразования Фурье.
6. Выполнить разложение волновой функции в сферическом базисе (Y_{lm} , $L = 1$ волна).
7. Провести анализ ориентаций ОУМ-проекции m для различных конфигураций спинов продуктов распада.

Актуальность:

1. Метод экспериментального определения закрученности вне оптики. т.е. для высоко-энергичных частиц
2. Изучения углового состояния пары фермион-антифермион в распаде скалярного, псевдоскалярного и СР смешанного состояний

Научная новизна:

1. Разработан новый метод экспериментального определения параметров закрученности (величины и знака топологического заряда) массивных частиц, основанный на анализе дифракционных картин от треугольных апертур.
2. Получено аналитическое выражение для волновой функции фермион-антифермионной пары в координатном представлении.
3. Теоретически обосновано возникновение закрученных состояний в распадах скалярных частиц на пару фермионов.
4. Выполнено оригинальное исследование интерференции состояний смешанной четности (скаляр + псевдоскаляр) и получены аналитические выражения для спин-орбитальных корреляционных слагаемых, описывающих закрученность конечного состояния.

Практическая значимость

1. Разработанный программный комплекс на базе метода SSFM может быть использован для проектирования и оптимизации детектирующих систем, предназначенных для измерения параметров закрученных пучков в экспериментах на ускорителях и лазерах на свободных электронах.
2. Предложенные аналитические методы описания квантовых состояний в распадах скалярных бозонов могут быть применены при обработке данных экспериментов на БАК (коллаборации CMS, ATLAS) для поиска эффектов нарушения СР-инвариантности в секторе Юкавских взаимодействий.

Глава 2. Новый метод экспериментального определения закрученности

Дифракция на щели является эффективным неинвазивным методом определения поперечной фазы пучка [25]. Круговая щели обладает осевой симметрией и, как следствие, нечувствительна к знаку m . Напротив, для равносторонней треугольной щели дифракционная картина показывает знак и величину m .

В данной главе происходит анализ дифракции на круговой и треугольных щелях для дальней зоны с помощью формализма Кирхгофа-Френеля, результат сравнивается с численным решением методом split-step Fourier propagation для уравнения Шредингера.

2.1 Уравнение Шредингера в цилиндрических координатах

Движение свободных частиц, несущих ОУМ обычно описывается уравнением Клейна-Гордона. В нерелятивистском пределе это сводится к зависящему от времени уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

В стационарном случае уравнение с волновым числом $\mathbf{k} = |\mathbf{p}|/\hbar$, поле описывается скалярным уравнением Геймгольца:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.2)$$

В декартовых координатах x, y, z решение выражается в виде плоских волн:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2.3)$$

В сферических координатах r, θ_r, φ_r получим сферические волны:

$$\psi_{klm} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) Y_{lm}(\theta_r, \varphi_r) \quad (2.4)$$

В цилиндрических координатах ρ, φ, z для стационарного случая $\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}) \exp(i\hbar^{-1}Et)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(r, \varphi, z) = E\psi(r, \varphi, z). \quad (2.5)$$

получим цилиндрические (бесселевы) волны [1; 2], где J_m - бесселевская функция первого рода, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - азимутальное квантовое число, $k_z = p_z/\hbar$ - продольное волновое число, κ - поперечное квантовое число.

$$\psi_{\kappa m k_z} = J_m(\kappa \rho) e^{i(m\varphi_r + k_z z)} \quad (2.6)$$

В КТП такому решению соответствует частица направленная вдоль оси z с поперечным импульсом $\hbar\kappa$ и энергией $\hbar\omega = \hbar c \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}$. Такие состояния называются закрученными: у них определена проекция орбитального момента импульса $\hbar m$, а значения момента импульса $\hbar^2 l(l+1)$ ограничиваются только $l \geq |m|$.

Плоская волна может быть представлена в виде суперпозиции цилиндрических волн:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\varphi_k} \psi_{k_{\perp} m k_z}(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

где $\mathbf{k} = (k_{\perp} \cos \varphi_k, k_{\perp} \sin \varphi_k, k_z)$

Цилиндрическую волну можно разложить в плоскости xy как:

$$\psi_{\kappa m k_z} = e^{ik_z z} \int a_{\kappa m}(\mathbf{k}_{\perp}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \quad (2.8)$$

где $a_{\kappa m}(\mathbf{k}_{\perp}) = i^m e^{im\varphi_k} \frac{2\pi}{k_{\perp}} \delta(k_{\perp} - \kappa)$

Бесселевские пучки соответствуют стационарным состояниям, но еще являются неинтегрируемыми т.к. $\int |\psi_{\kappa m k_z}|^2 d^3 r = \infty$. В экспериментах используются ограниченные интегрируемые пучки, например Лагерр-Гауссовы пучки [26; 27].

Чтобы получить аналитическое выражения для таких пучков используется параксиальное приближение: $p_{\perp} \leq p$ и $k_z \approx k$. Тогда уравнение Шредингера (2.5) можно переписать с помощью подстановки $\partial^2/\partial z^2 \simeq -k^2 + 2ik\partial/\partial z$. Получаем параксиальное волновое уравнение [28]:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right) \psi(\mathbf{r}, z) = 0. \quad (2.9)$$

Для решения уравнения в цилиндрических координатах воспользуемся разделением переменных $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r, \varphi, t)\psi_z(z, t)$ [29]:

$$\begin{aligned}\psi_{m,n}^{\text{LG}}(r, \varphi, t) = & \mathcal{N} r^{|m|} \left[\frac{1}{\sigma_{\perp}(t)} \right]^{|m|+1} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{\sigma_{\perp}^2(t)} \right) e^{im\varphi} \\ & \times \exp \left[-\frac{r^2}{2\sigma_{\perp}^2(t)} \left(1 - i\frac{t}{t_d} \right) \right] \\ & \times \exp \left[-iM \arctan \left(\frac{t}{t_d} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.10)$$

где $L_n^{|m|}$ - присоединенный полином Лаггерра, $\mathcal{N}$ - нормировочная константа.

$$M = 2n + |m| + 1, \quad (2.11)$$

в специализированной литературе называется beam quality factor [27].

Начальная поперечная ширина $\sigma_{\perp}(0)$ связана с среднеквадратичным разбросом поперечного импульса σ_p :

$$\sigma_{\perp}(0) = \frac{1}{\sigma_p}, \quad t_d = \frac{m}{\sigma_p^2} \quad (2.12)$$

Ширина изменяется как:

$$\sigma_{\perp}(0) = \sigma_{\perp}(0) \sqrt{1 + (t/t_d)^2} = \sigma_{\perp}(0) \sqrt{1 + (\langle z \rangle / z_R)^2} \quad (2.13)$$

Длина Релея и средняя скорость:

$$z_R = \frac{2\Pi \sigma_{\perp}^2(0)}{M \lambda_{\text{dB}}}, \quad \langle u \rangle = \frac{\langle z \rangle}{t} \quad (2.14)$$

Фаза Гои:

$$\Phi(t) = M \arctan(t/t_d) \quad (2.15)$$

2.2 Дифракция на щели. Общий метод с функциями Грина

Воспользуемся вторым тождеством Грина:

$$\int_V \left(\psi(x') \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \right) dV = \int_S \left(\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.16)$$

Пусть ψ - решение уравнения, а $\varphi = G$ - функция Грина. Подставив в (2.16), получим:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_S \left(\varphi(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} \varphi(\mathbf{x}') \right) \cdot d\mathbf{S}' \quad (2.17)$$

Функция Грина для уравнения есть:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (2.18)$$

Поэтому,

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}_r, \quad \mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (2.19)$$

Т.к. $d\mathbf{S}' = -\mathbf{n}_s dS'$, где $\mathbf{n}_s$ - единичные вектор нормали к поверхности в точке $\mathbf{x}'$, направлена внутрь ограничивающей поверхности, то можно записать уравнение (2.19), как

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(\psi(\mathbf{x}') \left(ik - \frac{1}{r} \right) (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s) + \mathbf{n}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \psi(\mathbf{x}') \right) dS'. \quad (2.20)$$

2.3 Аналитическое решение для тонкой круговой и треугольной щелей

Рассмотрим задачу рассеяния на круговой щели $r \in (a, a + \delta a)$ для плоской и закрученной волн. Рассматривается узкая щель $\delta a \ll a$. Для плоской волны $\psi(\mathbf{x}') = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}$:

$$\psi(\mathbf{x}) \approx \frac{a\delta a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{e^{ikr}}{r} \left(\left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{z}{r} + ik_z \right), \quad (2.21)$$

Для закрученной волны, движущейся вдоль оси $z = z'$ и имеющий проекцию импульса k_z и момента импульса m , поле $\varphi(\mathbf{x}')$

$$\psi(\mathbf{x}) \approx \frac{a\delta a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{e^{ikr}}{r} e^{-im\varphi} \left(\left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{z}{r} + ik_z \right). \quad (2.22)$$

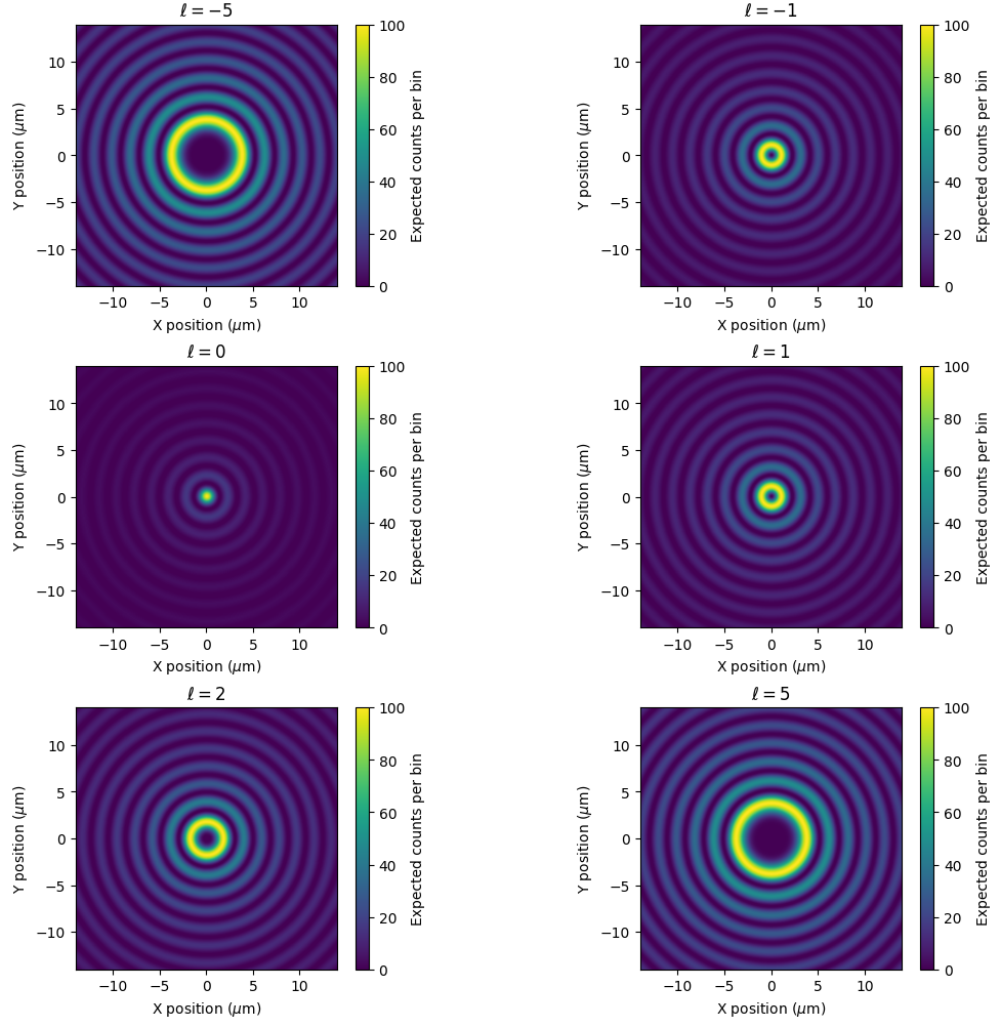


Рисунок 2.1 — Дифракция на тонкой круговой щели для закрученных электронных пучков Бесселя с $m = -5, -1, 0, 1, 2, 5$, проходящие через круговую апертуру радиусом $a = 400$ нм, шириной щели $\delta a = 15$ нм; расстояние между апертурой и экраном $z = 0,4$ м. Осевая симметрия подразумевает нечувствительность к знаку m ; радиус первого яркого кольца увеличивается с $|m|$.

2.4 Численное моделирование с помощью FFT. Анализ масок.

Для численного моделирования аналогичному интегралу Киргкофа (2.20) используется метод split-step Fourier (SSFM) [29; 30] Рассматривается уравнение Шредингера с потенциалом:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.23)$$

Решение для произвольного шага:

$$\psi(t + \Delta t) = U(\Delta t)\psi(t), \quad U(\Delta) = \exp -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t \quad (2.24)$$

Где гамильтониан $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2, \quad [\hat{V}\psi](\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

Аппроксимируем оператор эволюции с порядком малости $O(\Delta t)$:

$$U(\Delta t) \sim e^{-\frac{i}{2\hbar}\hat{V}\Delta t}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{T}\Delta t}e^{-\frac{i}{2\hbar}\hat{V}\Delta t^3} \quad (2.26)$$

Параксиальное приближение:

$$\psi(\mathbf{r}, z, t) \sim e^{i(kz - \omega t)}u(\mathbf{r}, z) \quad (2.27)$$

где $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$

$$i\partial_z u(\mathbf{r}, z) = -\frac{1}{2k}\nabla_{\perp}^2 u(\mathbf{r}, z) \quad (2.28)$$

Алгоритм (сложность $N \log N$):

1. Производится Быстрое Преобразование Фурье (FFT) для поля $u(x, y, z)$, получается поперечный спектр $\tilde{u}(k_x, k_y, z)$;
2. Умножение на пропагатор

$$U_T(k_x, k_y) = \exp \left[-\frac{i\Delta z}{2k}(k_x^2 + k_y^2) \right] \quad (2.29)$$

3. Применение обратного FFT для получения обновленного поля $u(x, y, z + \Delta z)$.

Для параксиального приближения описание апертур и масок и тонких элементов происходит через $A(x, y) \in [0, 1]$ на выбранной z -плоскости:

$$u(x, y, z_0^-) = A(x, y)u(x, y, z_0^+) \quad (2.30)$$

Резкая апертура соответствует $A = 1$ внутри и $A = 0$ снаружи, на практике используется плавный переход $A(x, y)$ для улучшения численной стабильности за счет уменьшения высокочастотных артефактов [31].

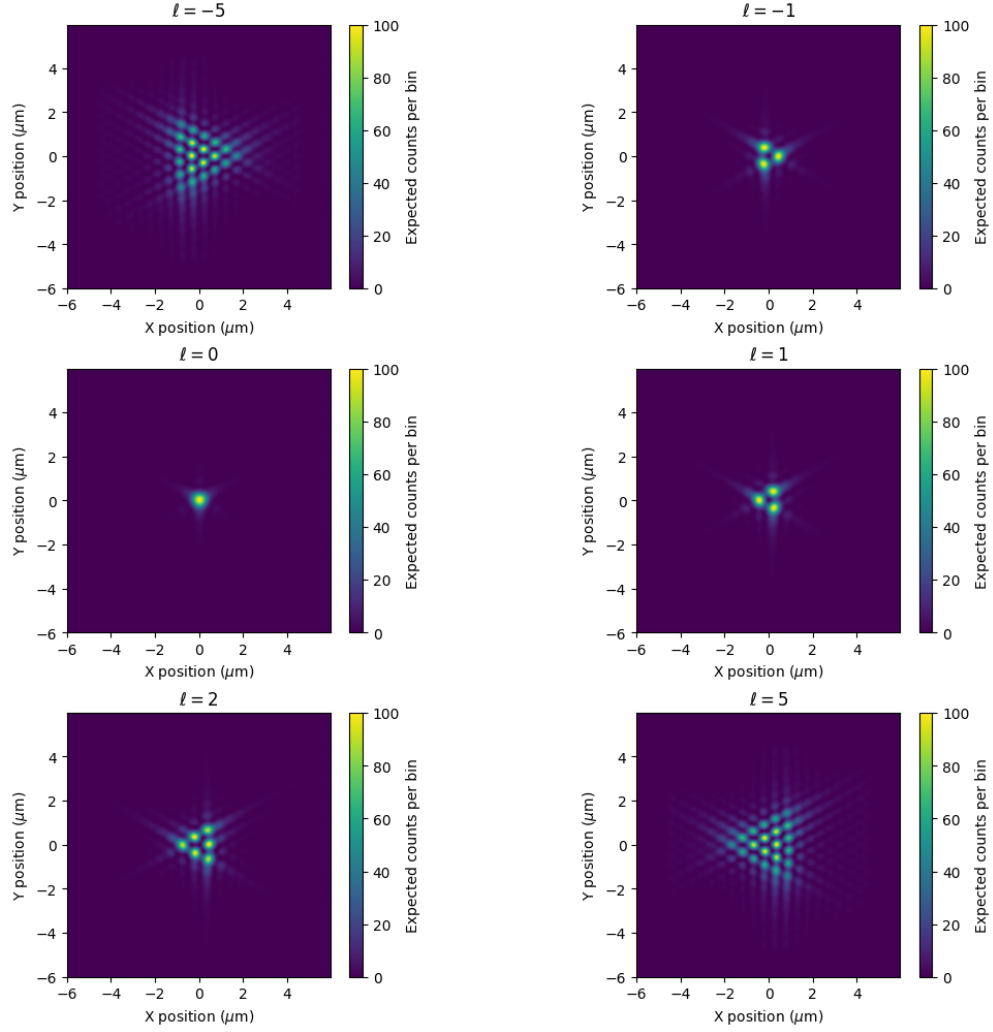


Рисунок 2.2 — Дифракция закрученных бесселевских пучков с $E_{\text{kin}} = 100$ keV и $m = -5, -1, 0, 1, 2, 5$, проходящих через равностороннюю треугольную апертуру со стороной $L = 400$ нм; расстояние между апертурой и экраном $z = 0,2$ м. Число точек на сторону: $|m| + 1$ и смена ориентации при $m \rightarrow -m$ задают величину и знак ОУМ.

2.5 Аналитические выражения для треугольной маски

В дальнейшем используются координаты для экрана (x, y, z) и для щели $(x', y', 0)$. Для закрученного пучка с топологическим зарядом m и медленно меняющейся огибающей $u(x', y')$:

$$\psi_{\text{in}}(x', y') = \rho'^{|m|} e^{im\varphi'} u(x', y') = \begin{cases} (x' + iy')^m u, & m \geq 0, \\ (x' - iy')^{|m|} u, & m < 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

воспользуемся преобразованием $\mathcal{F}[x'^p y'^q A(x', y')] = i^{p+q} \partial_{k_x}^p \partial_{k_y}^q \tilde{A}(\mathbf{k})$ и получим

$$\widetilde{A\psi_{\text{in}}}(\mathbf{k}) \propto \sum_{p=0}^{|m|} \binom{|m|}{p} (\pm i)^{|m|-p} i^p \partial_{k_x}^p \partial_{k_y}^{|m|-p} \tilde{A}(\mathbf{k}), \quad (2.32)$$

где верхний знак берется для $m > 0$. Таким образом, вихрь действует как дифференциальный оператор $|m|$ -го порядка в $\mathbf{k}$ -пространстве, выделяя быстро меняющиеся области величины $\tilde{A}$ в виде ярких пятен. Число таких пятен равно количеству пар неотрицательных чисел (p, q) , удовлетворяющих условию $p + q \leq |m|$:

$$N(|m|) = \sum_{p=0}^{|m|} \sum_{q=0}^{|m|-p} 1 = \frac{(|m|+1)(|m|+2)}{2}. \quad (2.33)$$

Рассматривается треугольник с вершинами $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ для плоскости апертуры $z = 0$.

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 \quad (2.34)$$

Амплитуда Фурье для щели:

$$\tilde{A} = \int \int_{\Delta} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y). \quad (2.35)$$

Параметризация для внутренности щели:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{v}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2, \quad s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1, \quad (2.36)$$

с Якобианом

$$J = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|, \quad (2.37)$$

который равен удвоенной площади треугольника. Вводя линейные формы

$$\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1, \quad \beta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2, \quad (2.38)$$

интеграл преобразуется к виду

$$\tilde{A}(\mathbf{k}) = J e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0} \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt e^{-i(\alpha s + \beta t)} \quad (2.39)$$

Интегрирование по s и t позволяет получить аналитическое выражение в замкнутом виде:

$$\tilde{A}(\mathbf{k}) = J e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0} \frac{\alpha e^{-i\beta} - \beta e^{-i\alpha} - (\alpha - \beta)}{\alpha \beta (\alpha - \beta)} \quad (2.40)$$

Коэффициенты α , β и $\alpha - \beta$ соответствуют трем выделенным направлениям в $\mathbf{k}$ -пространстве, каждое из которых ортогонально соответствующему ребру; вдоль этих направлений $\tilde{A}(\mathbf{k})$ формирует ярко выраженные линии гребней с чередующимися максимумами и минимумами. Их суперпозиция порождает характерную шестилучевую (гексагональную) симметрию интенсивности в дальней зоне. Определим базисные векторы обратной решетки $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ соотношением $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Для равностороннего треугольника со стороной L имеет $|\mathbf{G}_1| = |\mathbf{G}_2| = 4\pi/(\sqrt{3}L)$ с углом $\angle(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = 60^\circ$. Три семейства линий конструктивной интерференции

$$\alpha = 2\pi p, \quad \beta = 2\pi q, \quad \alpha - \beta = 2\pi s, \quad p, q, s \in \mathbb{Z}, \quad (2.41)$$

пересекаются в узлах обратной решетки

$$\mathbf{k}_{p,q} = p\mathbf{G}_1 + q\mathbf{G}_2, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (2.42)$$

которые отображаются на координаты детектора посредством соотношения для дальней зоны. Расстояние между ближайшими соседями вдоль направления базисного вектора обратной решетки пересчитывается в шаг в плоскости детектора:

$$\Delta = \frac{\lambda_{\text{дБ}} z}{2\pi} |\mathbf{G}_1| = \frac{2\lambda_{\text{дБ}} z}{\sqrt{3}L} \quad (2.43)$$

Дифференциальный отбор $|m|$ -го порядка выделяет конечное подмножество таких узлов; в частности, подсвечиваются узлы с неотрицательными индексами (p, q) и $p + q \leq |m|$, а общая ориентация треугольной структуры меняется на противоположную при замене $m \rightarrow -m$.

2.6 Обсуждение результатов.

Круговая апертура не чувствительна к знаку ОУМ, но позволяет оценить его модуль. Показано, что дифракционная картина круговой щели (Рис. 2.1) сохраняет осевую симметрию независимо от знака топологического заряда m . Радиус первого яркого кольца монотонно возрастает с увеличением $|m|$, что дает возможность определять абсолютную величину ОУМ пучка.

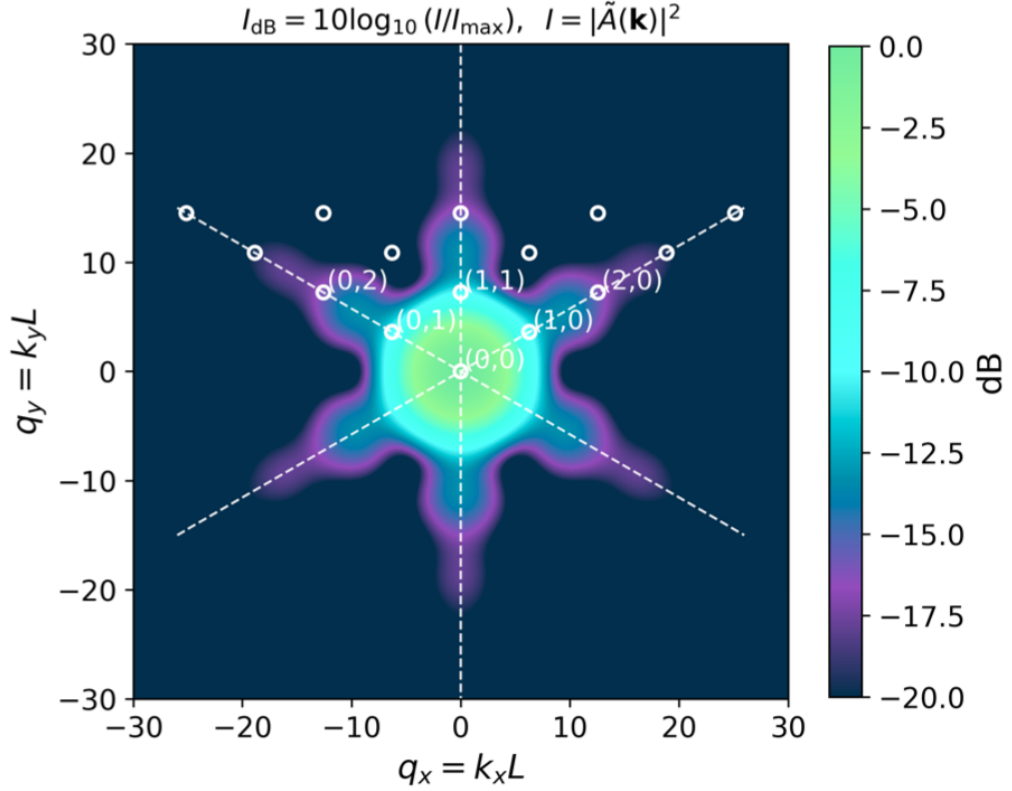


Рисунок 2.3 — Аналитическая фурье-амплитуда для равносторонней треугольной апертуры (сторона $L = 0.5$ мкм). Цветовая шкала отображает $S_{\text{дБ}} = 10 \log_{10}(\tilde{A}(\mathbf{k})^2 / \max_{\mathbf{k}} |\tilde{A}(\mathbf{k})|^2)$; оси $q_x = k_x L, q_y = k_y L$. Пунктирными линиями показаны три семейства гребней, ортогональных сторонам апертуры: $\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, $\beta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ и $\alpha - \beta = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0$; их суперпозиция обеспечивает характерную гексагональную симметрию. Светлыми кружками отмечены узлы обратной решетки $\mathbf{k}_{p,q} = p\mathbf{G}_1 + q\mathbf{G}_2$, выделяемые вихрем с зарядом m , где $p, q \geq 0$ и $p + q \leq |m|$ (здесь $|m| = 4$; знак m меняет ориентацию на противоположную). Вблизи начала координат несколько узлов снабжены индексами (p, q) .

Треугольная апертура раскрывает знак и величину ОУМ. Для равносторонней треугольной щели (Рис. 2.2) нарушение осевой симметрии приводит к появлению характерных "точек" на сторонах дифракционной картины. Количество таких точек равно $|m| + 1$, а ориентация рисунка меняется при замене $m \rightarrow -m$. Это позволяет однозначно определить как модуль, так и знак топологического заряда.

Метод FFT дает хорошее согласие с аналитическим результатом. Его использование обеспечивает эффективное вычисление дифракционных картин для пучков Бесселя и Лагерра-Гаусса с различными m .

Установлено, что разрешающая способность ограничена размером апертуры, расстоянием до экрана и длиной волны (кинетической энергией частиц). Для малых $|m|$ различия в дифракционных картинах наиболее выражены, что важно для экспериментальной идентификации.

Метод не требует сложных интерферометрических систем и может быть применен к пучкам массивных частиц (электронов, ионов) в области высоких энергий. Простота реализации делает его перспективным для диагностики закрученных состояний в ускорительных экспериментах.

Анализ проведен в параксиальном приближении для бесконечно тонких апертур; в реальном эксперименте необходимо учитывать конечную толщину щели и возможные аберрации.

Показано, что треугольная апертура является простым и надежным диагностическим инструментом для измерения знака и величины ОУМ, что особенно важно для экспериментов, где закрученные состояния возникают естественным образом (например, в распадах частиц).

Глава 3. Спин-орбитальное состояние пары фермион-антифермион в распаде (псевдо)скалярной частицы

3.1 Лагранжиан. Определения

В последнее время начало развиваться новое применение закрученных состояний, теперь в физике элементарных частиц и высоких энергий. В данной работе представлено описание естественного возникновения закрученных состояний в распаде скалярной частицы на фермион-антифермионную пару ($H \rightarrow f\bar{f}$).

Двучастичные распады бесспиновой частицы допускают в конечных состояниях $L = 0$ и $L \neq 0$ из-за симметрии. В тоже время закон сохранения импульса фиксирует фермион и антифермион "спиной к спине". Это часто создает впечатление, что ненулевой орбитальный момент (ОУМ) противоречит кинематике.

Причиной этого противоречия является рассмотрение задачи в импульсном представлении. Получив матричный элемент для $0^\pm \rightarrow f\bar{f}$, выражение для амплитуды в импульсном пространстве и соответствующую волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$. Для скалярной частицы в дальнейшем будет получено

$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_1(pr) \chi^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \eta(\mathbf{s}_2),$$

т.е. чистая $L = 1$ (Р-волна) в терминах относительной координаты. Разложение $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ в сферические тензоры показывает, что фиксирование проекции спина по одной оси выделяет единственную сферическую гармонику Y_{1m} (определенна проекция ОАМ m). Поэтому определенные спиновые конфигурации соответствуют определенным m в пределах мультиплета $L = 1$

3.2 Ширина распада для $H \rightarrow f + \bar{f}$

Матричный элемент $H \rightarrow f + \bar{f}$:

$$i\mathcal{M} = i\frac{m_f}{v}\bar{u}(p_1, s_1)v(p_2, s_2), \quad (3.1)$$

где m_f - масса фермиона, $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$ ГэВ - вакуумное среднее поля Хиггса, u, v - спиноры Дирака для фермиона и антифермиона соответственно [32]. Ширина распада вычисляется как:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{\beta_f N_C}{64\pi^2 m_H} |i\mathcal{M}|^2, \quad (3.2)$$

где $N_C = 1$ для лептонов и $N_C = 3$ для кварков, $\beta_f = \sqrt{1 - 4m_f^2/m_H^2}$ - скорость фермиона, m_H - масса бозона Хиггса.

Тогда квадрат матричного элемента, просуммированный по поляризациям равен:

$$|i\mathcal{M}|^2 = \frac{4m_f^2}{v^2} ((p_1, p_2) - m_f^2) = \frac{2m_H^2 m_f^2 \beta_f^2}{v^2}, \quad (3.3)$$

Обобщая формулу (3.3) на случай кварков и с учетом (3.2) получим ширину распада:

$$\Gamma = \frac{G_F N_C}{4\sqrt{2}\pi} m_H m_f^2 \beta_f^3. \quad (3.4)$$

Вероятность распада увеличивается с ростом массы фермиона, но т.к. $m_H \sim 125$ ГэВ, распад на $t\bar{t}$ запрещен.

Вычисляя квадрат матричного элемента, без суммирования по спиновым состояниям $f + \bar{f}$

$$\begin{aligned} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{m_f^2}{4v^2} \text{Tr}((\hat{p}_1 + m_f)(1 + \gamma_5 \hat{s}_1)(\hat{p}_2 - m_f)(1 + \gamma_5 \hat{s}_2)), \\ &= \frac{m_f^2 m_H^2 \beta_f^2}{2v^2} [1 + (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) - 2(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{n})(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{n})], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор вдоль импульса фермиона p_1 , $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ - единичные векторы, направленные по спинам фермиона и антифермиона в системах покоя.

Дифференциальная ширина распада бозона Хиггса:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{N_C \beta_f^3 m_f^2 m_H \sqrt{2} G_F}{128\pi^2} [1 + (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) - 2(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{n})(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{n})]. \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) находится вероятность распада с произвольными спинами. Два частных случая следуют из этой формулы:

(i) Спины $\boldsymbol{\xi}_1$ и $\boldsymbol{\xi}_2$ поперечны вектору $\mathbf{n}$. Определим угол φ как

$$(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_2) = \cos \varphi. \quad (3.7)$$

Тогда формулу (3.6) можно переписать

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{N_C \beta_f^3 m_f^2 m_H \sqrt{2} G_F}{128\pi^2} (1 + \cos \varphi). \quad (3.8)$$

Пара фермион-антифермион рождается с большей вероятностью если их спины параллельны друг другу $\mathbf{S}_{\xi_1} = \pm 1$, тогда пара $f + \bar{f}$ должна обладать проекцией орбитального вдоль направления спина с противоположным знаком: $L_{\xi_1} = \mp 1$, как показано на Рис. 3.1 (ii) Спины $\boldsymbol{\xi}_1$ и $\boldsymbol{\xi}_2$ параллельны

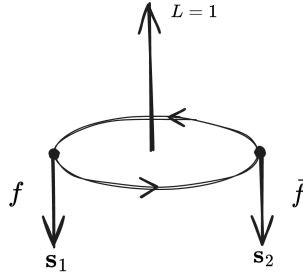


Рисунок 3.1 — Поперечно направленные спины фермиона и антифермиона с полным спином $\mathbf{S} = -1$ и компенсирующим орбитальным моментом $\mathbf{L} = 1$

вектору $\mathbf{n}$, т.е. поляризация продольная для фермиона λ_1 и антифермиона λ_2 :

$$(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{n}) = \lambda_1, \quad (\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{n}) = -\lambda_2, \quad (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_2) = -\lambda_1 \lambda_2. \quad (3.9)$$

Ширина распада равняется:

$$\Gamma = \frac{N_C \beta_f^3 m_f^2 m_H \sqrt{2} G_F}{32\pi} (1 + \lambda_1 \lambda_2). \quad (3.10)$$

Из формулы следует, что у фермиона и антифермиона одинаковые поляризации $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$. Проекция полного спина на рана нулю, тогда проекция орбитального момента на ту же ось также равна нулю как показано на Рис. 3.2.

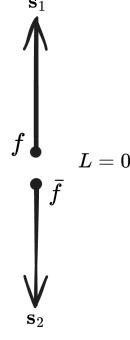


Рисунок 3.2 — Продольно направленные спины фермиона и антифермиона с полным спином $\mathbf{S} = 0$

3.3 Волновая функция в импульсном и координатном представлениях

Рассматривается распад скалярного бозона Хиггса,

$$H \rightarrow f + \bar{f},$$

в пару фермиона f и антифермиона $\bar{f}$ со спиновыми 3-векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, соответственно. Конечное состояние может быть разложено в импульсном представлении как

$$|f\bar{f}\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}} |\mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2\rangle, \quad (3.11)$$

где $\tilde{\psi}$ - волновая функция в импульсном представлении и r_i - проекция вектора спина $\mathbf{s}_i$ на ось z в конфигурационном пространстве. Двучастичное состояние определяется как

$$|\mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}} a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) b_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) |0\rangle, \quad (3.12)$$

где $a_r^\dagger(\mathbf{p})$, $b_r^\dagger(\mathbf{p})$ операторы рождения для фермиона и антифермиона соответственно. Волновая функция ψ в конфигурационном пространстве может быть найдена как Фурье преобразование $\tilde{\psi}$:

$$\begin{aligned} \psi_{r_1 r_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \times \\ &\times e^{+i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отметим, что $\psi(\mathbf{s}_1)$ определена для фиксированной проекции спиновых векторов на произвольную ось. Поскольку S-матрица является оператором

эволюции, проецируя квантовое состояние $S|H\rangle$ на двухчастичное Фоковское состояние $\langle \mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2 |$ дает

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \frac{\langle \mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2 | S | H \rangle}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{i\mathcal{M}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}},\end{aligned}\quad (3.14)$$

где P - это 4-импульс Хиггсовского бозона. Элемент S -матрицы для плоской волны

$$i\mathcal{M}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = i \frac{m_f}{v} \bar{u}_{r_1}(\mathbf{p}_1) v_{r_2}(\mathbf{p}_2), \quad (3.15)$$

вычислен в ведущем порядке Стандартной Модели. m_f здесь это масса фермиона и v вакуумное среднее поля Хиггса. Воспользуемся (3.13), (3.14), и (3.15)

$$\begin{aligned}\psi_{r_1 r_2}(\mathbf{r}) &= \psi_{r_1 r_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= i \frac{m_f p}{16\pi^2 v} \int d\Omega_{\mathbf{n}} e^{ip\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \bar{u}_{r_1}(p\mathbf{n}) v_{r_2}(-p\mathbf{n}),\end{aligned}\quad (3.16)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ относительная координата, $E_p = m_H/2$, $p = \sqrt{E_p^2 - m_f^2}$, и интегрирование происходит по единичной сфере $d\Omega_{\mathbf{n}}$. С помощью D -матрицы Вигнера можно задать волновую функцию в конфигурационном пространстве, полагая произвольное направление векторов спина: Запишем волновую функцию как повернутую комбинацию компонент z -базиса.

$$\psi_{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \sum_{r_1, r_2 = \pm} D_{r_1 \rho_1}^{(1/2)}(\mathbf{s}_1) D_{r_2 \rho_2}^{(1/2)}(\mathbf{s}_2) \psi_{r_1 r_2}(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

где $\mathbf{s}_i = (\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i)$ $SU(2)$ вращение которое сопоставляет z и s (Углы Эйлера $\varphi, \theta, 0$)

$$\begin{aligned}D^{(1/2)}(\mathbf{s}_i) &= e^{-i\varphi_i \sigma_z/2} e^{-i\theta_i \sigma_y/2} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & -e^{-i\varphi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} \\ e^{i\varphi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Таким образом перейдем к произвольным осям вращения для $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$:

$$\begin{aligned}\psi_{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= \\ &= i \frac{m_f p}{16\pi^2 v} \int d\Omega_{\mathbf{n}} e^{ip\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \bar{u}_{\rho_1}(p\mathbf{n}, \mathbf{s}_1) v_{\rho_2}(-p\mathbf{n}, \mathbf{s}_2),\end{aligned}\quad (3.19)$$

где вращение спиноров для фиксированного z -базиса Для фермиона:

$$\begin{aligned} u_\rho(p\mathbf{n}, \mathbf{s}) &= \sum_{r=\pm} D_{r\rho}^{(1/2)}(\mathbf{s}) u_r(p\mathbf{n}) = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m_f} \chi_\rho(\mathbf{s}) \\ \sqrt{E_p - m_f} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \chi_\rho(\mathbf{s}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

И антифермиона:

$$\begin{aligned} v_\rho(-p\mathbf{n}, \mathbf{s}) &= \sum_{r=\pm} D_{r\rho}^{(1/2)}(\mathbf{s}) v_r(-p\mathbf{n}) = \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{E_p - m_f} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \eta_\rho(\mathbf{s}) \\ \sqrt{E_p + m_f} \eta_\rho(\mathbf{s}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Спиноры Паули $\chi_\rho(\mathbf{s})$ и $\eta_\rho(\mathbf{s})$ задаются (3.25). Произведение

$$\bar{u}_{\rho_1}(p\mathbf{n}, \mathbf{s}_1) v_{\rho_2}(-p\mathbf{n}, \mathbf{s}_2) = -2p \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2)$$

под интегралом определяет волновую функцию в конфигурационном пространстве. Посчитаем интеграл по углу (3.19):

$$\int d\Omega_{\mathbf{n}} e^{ip\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{n} = 4\pi i j_1(pr) \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r, \quad (3.22)$$

где $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, и таким образом получаем выражение для функции в конфигурационном пространстве:

$$\psi_{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{m_f p^2}{2\pi v} \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2) j_1(pr) \quad (3.23)$$

Пусть $\chi_r(\mathbf{s})$ это нормализованный собственный спинор $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}$ с собственным значением $r = \pm 1$ (что соответствует спину "вверх/вниз" вдоль $\mathbf{s}$), когда $\eta_r(\mathbf{s}) = i\sigma^2 \chi_r^*(\mathbf{s})$ определена для антифермионного спинора Паули.

Тогда матрицы поляризации имеют вид:

$$\begin{aligned} \chi_r(\mathbf{s}) \chi_r^\dagger(\mathbf{s}) &= \frac{1}{2} (1 + r \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \\ \eta_r(\mathbf{s}) \eta_r^\dagger(\mathbf{s}) &= \frac{1}{2} (1 - r \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

И спиноры Паули:

$$\begin{aligned} \chi_+(\mathbf{s}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{s}) &= \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ \eta_+(\mathbf{s}) &= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, & \eta_-(\mathbf{s}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
|\psi_{\rho_1\rho_2}|^2 &\propto \text{Tr}[\chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1)\chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})\eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2)\eta_{\rho_2}^\dagger(\mathbf{s}_2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})] \\
&= \frac{1}{4}\text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \rho_1\rho_2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \rho_1\rho_2\left((\mathbf{s}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - (\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{s}_2 \times \hat{\mathbf{r}})\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \rho_1\rho_2\left((\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - 2(\mathbf{s}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}
|\psi_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^2 &= \left(\frac{m_f p^2}{2\pi v}\right)^2 j_1^2(pr) \frac{1}{2} \times \\
&\times \left[1 + \rho_1\rho_2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2(\mathbf{s}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}))\right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.4 Псевдоскалярный случай

Воспользуемся разложением

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{m=-1}^{+1} Y_{1m}(\hat{\mathbf{r}}) \sigma_m^{(1)}, \tag{3.28}$$

где

$$\sigma_0^{(1)} = \sigma_z, \quad \sigma_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{\sqrt{2}}$$

тогда волновая функция в (3.23) может быть записана как

$$\psi_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \propto \sum_{m=-1}^{+1} Y_{1m}(\hat{\mathbf{r}}) A_m(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), \tag{3.29}$$

где

$$A_m(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) \sigma_m^{(1)} \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2)$$

Можно заметить, что ее пространственная часть это $L = 1$ волна. Коэффициенты A_m являются чисто спиновыми факторами; они фиксируют значения $m = -1, 0, +1$ для любого выбранного $\mathbf{s}_{1,2}$ и для $\rho_{1,2} = \pm 1$. Когда $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \equiv \hat{\mathbf{s}}$ естественно выбирать ось квантования орбитального момента по $\hat{\mathbf{s}}$. В этом базисе

$$A_m(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}) = \chi_{\rho_1}^\dagger(\hat{\mathbf{s}}) \sigma_m^{(1)} \eta_{\rho_2}(\hat{\mathbf{s}})$$

подчиняется правилам отбора

$$A_0 \neq 0 \text{ если } \rho_1 = -\rho_2, \quad A_{\pm 1} \neq 0 \text{ если } \rho_1 = \rho_2, \quad (3.30)$$

с общими фазами фиксированными по соглашению Следовательно,

$$\psi_{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}) \propto j_1(pr) \sum_{m=-1}^{+1} Y_{1m}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}}) A_m(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}).$$

Вычисляя в двух экстремумах полярного угла θ для $\hat{\mathbf{r}}$, учитывая $\hat{\mathbf{s}}$:

1. $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \hat{\mathbf{r}}$ ($\theta = 0$): только антипараллельные результаты выживают,

$$|\psi|^2 \propto (1 - \rho_1 \rho_2),$$

и из (3.30) это проецируется на *чистую* $m = 0$ компоненту,

$$\psi \propto j_1(pr) Y_{1,0}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}}).$$

2. $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \perp \hat{\mathbf{r}}$ ($\theta = \pi/2$): только параллельные результаты выживают,

$$|\psi|^2 \propto (1 + \rho_1 \rho_2),$$

и (3.30) выбирает *чистый* $m = \pm 1$ сектор,

$$\psi \propto j_1(pr) [Y_{1,+1}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}}) \text{ or } Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}})],$$

со знаком, который коррелирует с (ρ_1, ρ_2) по выбранной спинорной фазе.

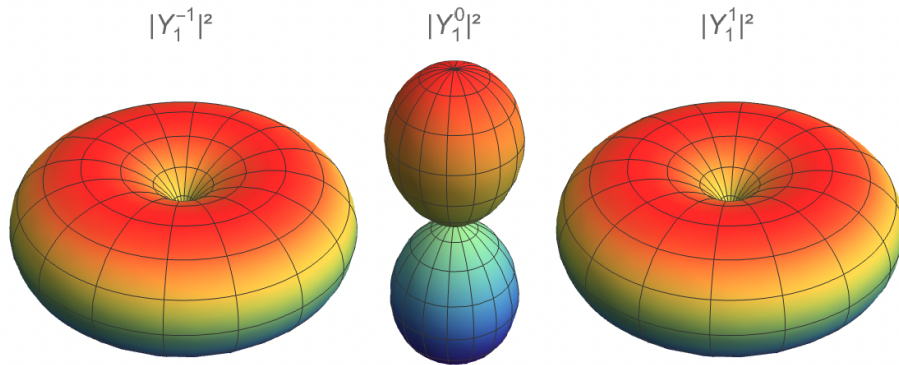


Рисунок 3.3 — Графики квадратов модулей сферических гармоник $|Y_1^{-1}|^2, |Y_1^0|^2, |Y_1^1|^2$.

Поэтому, фиксирование собственных состояний спина по общей оси, проецирует относительное движение на *единственное* сферическое ОУМ состояние $L = 1$. В частности, случай (i) дает $m = 0$, когда случай (ii) $m = \pm 1$. Для псевдоскалярной связи амплитуда равна:

$$i\mathcal{M}_{\rho_1\rho_2} = i \frac{m_f}{v} \bar{u}_{\rho_1}(p\mathbf{n}, \mathbf{s}_1) \gamma^5 v_{\rho_2}(-p\mathbf{n}, \mathbf{s}_2), \quad (3.31)$$

и со стандартными Дираковскими спинорами находим (в системе покоя Хиггса)

$$\bar{u}_{\rho_1}(p\mathbf{n}, \mathbf{s}_1) \gamma^5 v_{\rho_2}(-p\mathbf{n}, \mathbf{s}_2) = 2E_p \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2), \quad (3.32)$$

независимо от $\mathbf{n}$. Волновая функция в координатном представлении тогда

$$\psi_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{m_f E_p}{2\pi v} j_0(pr) \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2), \quad (3.33)$$

чистая парциальная волна $L = 0$. Ее квадрат модуля

$$|\psi_{\rho_1\rho_2}|^2 = \left(\frac{m_f E_p}{2\pi v} \right)^2 j_0^2(pr) \frac{1}{2} [1 - \rho_1\rho_2 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2]. \quad (3.34)$$

Таким образом псевдоскаляр соответствует S -волновому синглету: для $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2$ выживают только антипараллельные результаты, и отсутствует зависимость от $\hat{\mathbf{r}}$. Для $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{C}$ мы можем разложить $|\psi|^2$ используя тождество

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= |\varepsilon_1 \psi_S + \varepsilon_2 \psi_P|^2 \\ &= |\varepsilon_1|^2 |\psi_S|^2 + |\varepsilon_2|^2 |\psi_P|^2 + 2\Re(\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \psi_S \psi_P^*) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для интерференционного члена мы получаем

$$\psi_S \psi_P^* \propto i j_0(pr) j_1(pr) \underbrace{\chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2)}_S \underbrace{\eta_{\rho_2}^\dagger(\mathbf{s}_2) \chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1)}_{P^*}$$

3.5 Смешанный случай

Используя (3.24) мы получаем

$$\begin{aligned} SP^* &= \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{2} (1 - \rho_2 \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1) = \\ &= \frac{1}{2} \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1) - \frac{1}{2} \rho_2 \chi_{\rho_1}^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2) \chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Некоторые полезные тождества:

$$\begin{aligned}
\chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})\chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1) &= \rho_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1) \\
(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2) \\
\chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2)\chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_2 + i\rho_1\mathbf{s}_1 \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Учитывая (3.37) мы получаем:

$$SP^* = \frac{1}{2}\rho_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1) - \frac{1}{2}\rho_2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_2) - \frac{i}{2}\rho_1\rho_2\mathbf{s}_1 \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2)$$

Таким образом

$$2\Re(\varepsilon_1\varepsilon_2^*\psi_S\psi_P^*) = \frac{m_f^2}{4\pi^2v^2}\varepsilon_1\varepsilon_2^*j_0^2(pr)j_1^2(pr)\rho_1\rho_2\mathbf{s}_1 \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2)$$

Полное выражение:

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \frac{m_f^2}{4\pi^2v^2} \left[|\varepsilon_1|^2 p^4 j_1^2(pr) [1 + \rho_1\rho_2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2(\mathbf{s}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}))] \right. \\
&\quad + |\varepsilon_2|^2 E_p^2 j_0^2(pr) [1 - \rho_1\rho_2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)] \\
&\quad \left. + \varepsilon_1\varepsilon_2^* j_0^2(pr)j_1^2(pr)\rho_1\rho_2\mathbf{s}_1 \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2) \right]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

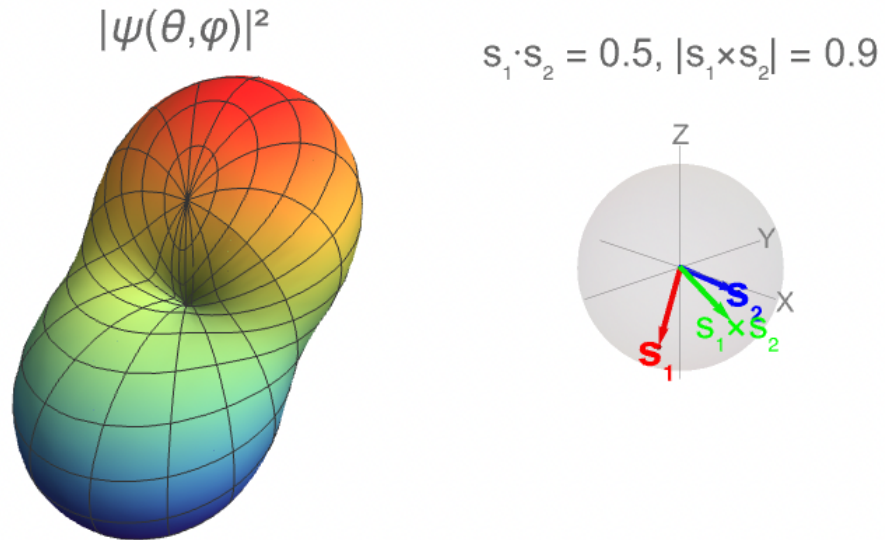


Рисунок 3.4 — Угловое распределение квадрата волновой функции $|\psi(\theta, \varphi)|^2$ в смешанном скалярно-псевдоскалярном распаде при заданных спиновых корреляциях.

3.6 Обсуждение результатов

Определение CP свойств бозона Хиггса было центральной темой после его открытия в 2012 [33; 34]. Ранние анализы $H \rightarrow ZZ$ и $H \rightarrow ZZ$ распадов исключают чистую псевдоскалярную гипотезу [33; 34]. Однако, эти каналы исследуют связь Хиггса с калибровочными бозонами и лишь косвенно чувствительны к возможным примесям нечетных CP в взаимодействиях Юкавы. Прямой доступ к CP структуре фермионной связи обеспечиваются $H \rightarrow \tau^+\tau^-$, где нарушение четности слабых распадов τ лептонов играют роль эффективных анализаторов спина.

Разработана обширная феноменологическая программа для определения угла смешивания скалярных и псевдоскалярных величин φ_τ (или эквивалентно $\alpha^{H\tau\tau}$) из угловых корреляций в $H \rightarrow \tau\tau$ распадов в адронных коллайдерах [35–44]. Обычно используются две взаимодополняющие стратегии. Метод параметра-взаимодействия (impact-parameter method) применим ко всем модам распада τ с заряженными конечными состояниями [35–38]. Метод плоскости распада ρ (ρ -decay plane method) использует усиленную чувствительность канала в котором оба τ лептона распадаются через промежуточные ρ мезоны [40–44]. В обоих подходах основная наблюдаемая это CP -нечетная угловая корреляция сконструированная через наблюдаемые продукты распада.

Обширный феноменологический анализ был произведен в [39], где авторы определили знаковый угол φ_{CP}^* между двумя плоскостями τ распада и изучили его чувствительность к углу смешивания. Включая фоновые эффекты Дрелла-Яна и эффекты детектора, они определили что φ_τ может быть измерен с неопределенностью $\Delta\varphi_\tau \approx 15^\circ$ (9°) на БАК с 150 fb^{-1} (500 fb^{-1}), улучшая примерно до 4° at 3 ab^{-1} . Они также продемонстрировали то, что фон Дрелла-Яна порождает примерно плоское φ_{CP}^* распределение, поскольку оно не содержит структуры интерференции скалярно-псевдоскалярной, характерной для смешанной связи Юкавы.

Эффекты проявились в первом экспериментальном измерении в от коллаборации CMS [45]. Используя Run 2 датасет при $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ соответствующая 137 fb^{-1} , CMS реконструировали аклопланарный угол φ_{CP} в нескольких каналах распада ($\tau_\mu\tau_h$, $\tau_e\tau_h$ и $\tau_h\tau_h$) и определили эффективный

угол смешивания $\alpha^{H\tau\tau} = -1 \pm 19^\circ$, соответствующий предсказанию Стандартной Модели. Чисто нечетная CP связь была исключена на уровне $3\,3\sigma$.

Смешанная скалярная–псевдоскалярная волновая функция выведенная в этой работе обеспечивает прямой теоретический источник таких CP -чувствительных наблюдаемых. В ур. (3.38) получен вклад интерференции в плотность вероятности.

$$\propto \hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2),$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ это единичный вектор вдоль относительной координаты. В системе покоя Хиггса, $\hat{\mathbf{r}}$ сонаправлен с направлением импульса фермиона, таким образом, эта структура соответствует тройному произведению спина и импульса. Она нечетна относительно CP и возникает из-за интерференции между скалярной ($L = 1$) и псевдоскалярной ($L = 0$) компонент волновой функции.

Наблюдаемые используемые в эксперименте - это импульсное представление этой структуры. В частности:

1. Корреляция тройного произведения в [39],

$$\mathcal{O}^* = \hat{\mathbf{q}}^{*-} \cdot (\hat{\mathbf{n}}_+^+ \times \hat{\mathbf{n}}_-^-),$$

является индикатором фундаментальной корреляции. $\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)$, при этом продукты распада кодируют направления спиной родительской частицы.

2. Знаковый угол φ_{CP}^* (или φ_{CP} в анализе CMS [45]) воспроизводит характеристическую $2\varphi_\tau$ фазовую зависимость генерируется скалярно–псевдоскалярной связи.
3. Почти плоскость фона Дрелла-Яна в φ_{CP}^* следует из отсутствия CP -нечетной скалярно–псевдоскалярной интерференции вклад в процессы, опосредованные векторным током.

Таким образом, разработанный здесь формализм координатного пространства явно указывает на квантово-механическое происхождение CP -чувствительных угловых корреляций, используемых в коллайдерном анализе. Тройное произведение структур появляется уже на уровне двух-частичной волновой функции и отражает интерференцию между различными орбитальными компонентами конечного состояния.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. **Разработан неинтерферометрический метод экспериментального определения параметров закрученности (величины и знака топологического заряда) массивных частиц**, основанный на анализе дифракционных картин от круговой и треугольной апертур. Показано, что круглая апертура позволяет оценить модуль орбитального углового момента $|m|$ по радиусу первого дифракционного кольца, тогда как треугольная апертура дает возможность однозначно определить знак m по числу и ориентации характерных "точек" на сторонах дифракционной картины.
2. **Численные исследования методом split-step Fourier (SSFM) показали** хорошее согласие с аналитическими решениями в рамках формализма Кирхгофа-Френеля. Установлена чувствительность дифракционных картин к величине и знаку ОУМ для бесселевских и лаггерр-гауссовых пучков с кинетической энергией 100 кэВ при прохождении через апертуры субмикронного размера.
3. **Математическое моделирование распада скалярной частицы на фермион-антифермионную пару** позволило получить явное выражение для волновой функции в координатном представлении. Показано, что относительное движение пары описывается чистой $L = 1$ волной (для скалярной связи) или $L = 0$ (для псевдоскалярной связи), а для смешанного CP -случая возникает интерференционный член, пропорциональный $\hat{r} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)$, который является CP -нечетным и может наблюдаться как тройное произведение импульса и спинов.
4. **Для выполнения поставленных задач был создан программный комплекс** на основе метода SSFM с использованием быстрого преобразования Фурье (FFT), позволяющий моделировать дифракцию закрученных волновых пакетов на апертурах произвольной формы.

Таким образом, в работе теоретически обосновано естественное возникновение закрученных состояний в распадах скалярных частиц, предложен практический метод их диагностики с помощью треугольной апертуры, а также получены аналитические выражения для спин-орбитальных корреляций, чувствительных к CP -нарушению в секторе Юкавских взаимодействий.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Наумову Дмитрию Вадимовичу за постановку задачи, ценные обсуждения и постоянную поддержку на всех этапах работы.

Список литературы

1. *Durnin, J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. A. — 1987. — Апр. — Т. 4, № 4. — С. 651—654. — URL: <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-4-4-651>.
2. *Durnin, J.* Diffraction-free beams / J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Апр. — Т. 58, вып. 15. — С. 1499—1501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1499>.
3. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen [и др.] // Phys. Rev. A. — 1992. — Т. 45, вып. 11. — С. 8185—8189.
4. *Tamm, C.* Bistability and transverse instabilities of truncated Hermite-Gaussian beams / C. Tamm, C. O. Weiss // J. Opt. Soc. Am. B. — 1990. — Т. 7. — С. 1034—1043.
5. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate / M. W. Beijersbergen [и др.] // Opt. Commun. — 1994. — Т. 112. — С. 321—327.
6. *Bazhenov, V. Y.* Laser beams with screw dislocations in their equiphase surfaces / V. Y. Bazhenov, M. V. Vasnetsov, M. S. Soskin // JETP Lett. — 1990. — Т. 52. — С. 429—431.
7. *Curtis, J. E.* Dynamic holographic optical tweezers / J. E. Curtis, B. A. Koss, D. G. Grier // Opt. Commun. — 2002. — Т. 207. — С. 169—175.
8. Light Propagation with Phase Discontinuities: Generalized Laws of Reflection and Refraction / N. Yu [и др.] // Science. — 2011. — Т. 334. — С. 333—337.
9. Echo-enabled harmonics with orbital angular momentum / E. Hemsing [и др.] // Nature Photonics. — 2014. — Т. 8. — С. 46—51.
10. First Observation of Photons Carrying Orbital Angular Momentum in an Electron Storage Ring / J. Bahrtdt [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 111. — С. 034801.

11. *Sasaki, S.* Proposal for generating brilliant helical beams in the soft x-ray region / S. Sasaki, I. McNulty // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Т. 100. — С. 124801.
12. *Jentschura, U. D.* Generation of High-Energy Photons with Large Orbital Angular Momentum by Compton Backscattering / U. D. Jentschura, V. G. Serbo // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Т. 106. — С. 013001.
13. Coherent optical vortices from relativistic electron beams / E. Hemsing [и др.] // Nature Physics. — 2013. — Т. 9. — С. 549—553.
14. *Beth, R. A.* Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light / R. A. Beth // Phys. Rev. — 1936. — Июль. — Т. 50, вып. 2. — С. 115—125. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.50.115>.
15. Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity / Н. Хе [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Июль. — Т. 75, вып. 5. — С. 826—829. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.826>.
16. Generation of Terahertz Surface Plasmon Polaritons Using Nondiffracting Bessel Beams with Orbital Angular Momentum / В. А. Кныазев [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Т. 115, вып. 16. — С. 163901.
17. High-power terahertz beam with an orbital angular momentum generated at the Novosibirsk free electron laser / Y. Y. Choporova [и др.] // Phys. Rev. A. — 2017. — Т. 96, вып. 2. — С. 023846.
18. First Observation of Photons Carrying Orbital Angular Momentum in Undulator Radiation / J. Bahrtdt [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 111, вып. 3. — С. 034801.
19. *Сойфер, В. А.* Оптическое манипулирование микрообъектами: достижения и новые возможности, порожденные дифракционной оптикой / В. А. Сойфер, В. В. Котляр, С. Н. Хонина // Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ). — 2004. — Т. 35, № 6. — С. 1368—1432.
20. Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum / под ред. J. P. Torres, L. Torner. — Weinheim, Germany : Wiley-VCH, 2011.

21. Optical communications using orbital angular momentum beams / A. E. Willner [и др.] // Adv. Opt. Photon. — 2015. — Март. — Т. 7, № 1. — С. 66—106. — URL: <https://opg.optica.org/aop/abstract.cfm?URI=aop-7-1-66>.
22. Klar, T. A. Breaking Abbe's diffraction resolution limit in fluorescence microscopy with stimulated emission depletion beams of various shapes / T. A. Klar, E. Engel, S. W. Hell // Phys. Rev. E. — 2001. — Ноябрь. — Т. 64, вып. 6. — С. 066613. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.066613>.
23. Padgett, M. J. Orbital angular momentum 25 years on / M. J. Padgett // Opt. Express. — 2017. — Май. — Т. 25, № 10. — С. 11265—11274. — URL: <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-25-10-11265>.
24. Ivanov, I. P. Promises and challenges of high-energy vortex states / I. P. Ivanov // Progress in Particle and Nuclear Physics. — 2022. — Т. 127. — С. 103987.
25. Goodman, J. W. Introduction to Fourier optics / J. W. Goodman // Introduction to Fourier optics, 3rd ed., by JW Goodman. Englewood, CO: Roberts & Co. Publishers, 2005. — 2005. — Т. 1.
26. Allen, L. IV The Orbital Angular Momentum of Light / L. Allen, M. Padgett, M. Babiker // Т. 39 / под ред. E. Wolf. — Elsevier, 1999. — С. 291—372. — (Progress in Optics). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079663808703913>.
27. Karlovets, D. Vortex particles in axially symmetric fields and applications of the quantum Busch theorem / D. Karlovets // New Journal of Physics. — 2021. — Март. — Т. 23, № 3. — С. 033048. — URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abeacc>.
28. Siegman, A. Lasers / A. Siegman. — 1st Edition. — University Science Books, 05.1986. — URL: <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20%5C&path=ASIN/0935702113>.
29. Diffraction by circular and triangular apertures as a diagnostic tool of twisted matter waves / M. Maksimov [и др.] // Physical Review A. — 2025. — Дек. — Т. 112, № 6. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/z2rs-2ryl>.

30. *Weideman, J. A. C.* Split-Step Methods for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation / J. A. C. Weideman, B. M. Herbst // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1986. — Т. 23, № 3. — С. 485—507. — URL: <http://www.jstor.org/stable/2157521> (дата обр. 25.04.2026).
31. *Naumov, D. V.* Tdse-diffraction / D. V. Naumov. — 2025. — URL: <https://github.com/dmitryvnaumov/TDSE-Diffraction/tree/main> (дата обр. 08.09.2025) ; Accessed: 2025-09-08.
32. *Наумов, Д. В.* Квантовая теория поля для экспериментаторов и не только / Д. В. Наумов. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2026. — 532 с.
33. Measurement of the Properties of a Higgs Boson in the Four-Lepton Final State / S. Chatrchyan [и др.] // Phys. Rev. D. — 2014. — Т. 89, № 9. — С. 092007. — arXiv: [1312.5353](https://arxiv.org/abs/1312.5353) [hep-ex].
34. Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data / G. Aad [и др.] // Phys. Lett. B. — 2013. — Т. 726. — С. 120—144. — arXiv: [1307.1432](https://arxiv.org/abs/1307.1432) [hep-ex].
35. *Berge, S.* Determining the CP parity of Higgs bosons at the LHC in the tau to 1-prong decay channels / S. Berge, W. Bernreuther // Phys. Lett. B. — 2009. — Т. 671. — С. 470—476. — arXiv: [0812.1910](https://arxiv.org/abs/0812.1910) [hep-ph].
36. How to pin down the CP quantum numbers of a Higgs boson in its tau decays at the LHC / S. Berge [и др.] // Phys. Rev. D. — 2011. — Т. 84. — С. 116003. — arXiv: [1108.0670](https://arxiv.org/abs/1108.0670) [hep-ph].
37. *Berge, S.* Determination of the Higgs CP-mixing angle in the tau decay channels at the LHC including the Drell-Yan background / S. Berge, W. Bernreuther, S. Kirchner // Eur. Phys. J. C. — 2014. — Т. 74, № 11. — С. 3164. — arXiv: [1408.0798](https://arxiv.org/abs/1408.0798) [hep-ph].
38. *Berge, S.* Higgs CP properties using the tau decay modes at the ILC / S. Berge, W. Bernreuther, H. Spiesberger // Phys. Lett. B. — 2013. — Т. 727. — С. 488—495. — arXiv: [1308.2674](https://arxiv.org/abs/1308.2674) [hep-ph].
39. *Berge, S.* Prospects of constraining the Higgs boson's CP nature in the tau decay channel at the LHC / S. Berge, W. Bernreuther, S. Kirchner // Phys. Rev. D. — 2015. — Т. 92. — С. 096012. — arXiv: [1510.03850](https://arxiv.org/abs/1510.03850) [hep-ph].

40. Measuring the Higgs boson's parity using $\tau \rightarrow \rho \nu$ / G. R. Bower [и др.] // Phys. Lett. B. — 2002. — Т. 543. — С. 227–234. — arXiv: [hep-ph/0204292](#).
41. *Desch, K.* Measuring the Higgs boson parity at a linear collider using the tau impact parameter and $\tau \rightarrow \rho \nu$ decay / K. Desch, Z. Was, M. Worek // Eur. Phys. J. C. — 2003. — Т. 29. — С. 491–496. — arXiv: [hep-ph/0302046](#).
42. Probing the CP nature of the Higgs boson at linear colliders with tau spin correlations: The Case of mixed scalar - pseudoscalar couplings / K. Desch [и др.] // Phys. Lett. B. — 2004. — Т. 579. — С. 157–164. — arXiv: [hep-ph/0307331](#).
43. *Was, Z.* Transverse spin effects in $H/A \rightarrow \tau^+ \tau^-$: $\tau^+ \tau^- \rightarrow \nu X^{+-}$, Monte Carlo approach / Z. Was, M. Worek // Acta Phys. Polon. B. — 2002. — Т. 33. — С. 1875–1884. — arXiv: [hep-ph/0202007](#).
44. *Worek, M.* Higgs CP from $H / A^0 \rightarrow \tau \tau$ decay / M. Worek // Acta Phys. Polon. B. — 2003. — Т. 34. — С. 4549–4560. — arXiv: [hep-ph/0305082](#).
45. Analysis of the CP structure of the Yukawa coupling between the Higgs boson and τ leptons in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A. Tumasyan [и др.] // JHEP. — 2022. — Т. 06. — С. 012. — arXiv: [2110.04836 \[hep-ex\]](#).

Список рисунков

- 2.1 Дифракция на тонкой круговой щели для закрученных электронных пучков Бесселя с $m = -5, -1, 0, 1, 2, 5$, проходящие через круговую апертуру радиусом $a = 400$ нм, шириной щели $\delta a = 15$ нм; расстояние между апертурой и экраном $z = 0,4$ м. Осевая симметрия подразумевает нечувствительность к знаку m ; радиус первого яркого кольца увеличивается с $|m|$ 14
- 2.2 Дифракция закрученных бесселевских пучков с $E_{\text{kin}} = 100$ keV и $m = -5, -1, 0, 1, 2, 5$, проходящих через равностороннюю треугольную апертуру со стороной $L = 400$ нм; расстояние между апертурой и экраном $z = 0,2$ м. Число точек на сторону: $|m| + 1$ и смена ориентации при $m \rightarrow -m$ задают величину и знак ОУМ. 16
- 2.3 Аналитическая фурье-амплитуда для равносторонней треугольной апертуры (сторона $L = 0.5$ мкм). Цветовая шкала отображает $S_{\text{дБ}} = 10 \log_{10}(\tilde{A}(\mathbf{k})|^2 / \max_{\mathbf{k}} |\tilde{A}(\mathbf{k})|^2)$; оси $q_x = k_x L, q_y = k_y L$. Пунктирными линиями показаны три семейства гребней, ортогональных сторонам апертуры: $\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, $\beta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ и $\alpha - \beta = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0$; их суперпозиция обеспечивает характерную гексагональную симметрию. Светлыми кружками отмечены узлы обратной решетки $\mathbf{k}_{p,q} = p\mathbf{G}_1 + q\mathbf{G}_2$, выделяемые вихрем с зарядом m , где $p, q \geq 0$ и $p + q \leq |m|$ (здесь $|m| = 4$; знак m меняет ориентацию на противоположную). Вблизи начала координат несколько узлов снабжены индексами (p, q) 19
- 3.1 Поперечно направленные спины фермиона и антифермиона с полным спином $\mathbf{S} = -1$ и компенсирующим орбитальным моментом $\mathbf{L} = 1$ 23
- 3.2 Продольно направленные спины фермиона и антифермиона с полным спином $\mathbf{S} = 0$ 24

3.3	Графики квадратов модулей сферических гармоник $ Y_1^{-1} ^2, Y_1^0 ^2, Y_1^1 ^2$	28
3.4	Угловое распределение квадрата волновой функции $ \psi(\theta, \varphi) ^2$ в смешанном скалярно-псевдоскалярном распаде при заданных спиновых корреляциях.	30