

Характеристические функции и суммы случайных величин

Содержание

3.1.	Распределение суммы независимых случайных величин	33
3.2.	Пример: распределение Коши	34
3.3.	Характеристическая функция	34
3.4.	Сумма двух величин Коши через характеристические функции .	35
3.5.	Свойства характеристической функции	37
3.6.	Суммы многих независимых величин	37
3.7.	Примеры характеристических функций	38
3.8.	Моменты из характеристической функции	40
3.9.	Кумулянты	40
3.10.	Мост к центральной предельной теореме	41
3.11.	Интерактив: приближение к распределению Гаусса в пространстве Фурье	42
3.12.	Задачи	44
	Литература	46

Аннотация

В этой главе мы научимся находить распределение суммы независимых случайных величин. Прямой путь приводит к свёртке плотностей. Преобразование Фурье заменяет свёртку произведением и вводит характеристическую функцию. На нескольких знакомых распределениях мы разберём, как она работает, извлечём из неё моменты и кумулянты и подойдём к центральной предельной теореме.

3.1. Распределение суммы независимых случайных величин

Пусть X и Y — независимые случайные величины с плотностями $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Нас интересует сумма

$$S = X + Y. \quad (3.1)$$

Такая задача постоянно возникает в эксперименте. Полное энергосодержание складывается из энергосодержаний отдельных частиц, заряд на выходе детектора — из зарядов отдельных фотоэлектронов, а результат измерения — из сигнала и шума.

Значение $S = s$ можно получить из любой пары (x, y) , для которой $x + y = s$. После выбора x второе слагаемое равно $s - x$. Независимость позволяет перемножить плотности, а интегрирование собирает вклады от всех возможных x :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(s - x) dx. \quad (3.2)$$

Интеграл в формуле 3.2 называется **свёрткой**. Для него используется короткая запись

$$f_S = f_X * f_Y. \quad (3.3)$$

Звёздочка здесь обозначает операцию свёртки. Условие независимости существенно: для зависимых величин произведение $f_X(x) f_Y(s - x)$ нужно заменить совместной плотностью $f_{X,Y}(x, s - x)$.

3.1.1. Сумма нескольких величин

Для суммы

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (3.4)$$

получается последовательная свёртка:

$$f_{S_n} = f_{X_1} * f_{X_2} * \dots * f_{X_n}. \quad (3.5)$$

В развёрнутом виде это $(n - 1)$ -кратный интеграл:

$$f_{S_n}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_{n-1}}(x_{n-1}) \times f_{X_n}(s - x_1 - \dots - x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (3.6)$$

Каждое новое слагаемое добавляет ещё одно интегрирование. Формула верна и полезна, но с ростом размерности интеграла вычислять его непосредственно хочется всё меньше.

3.2. Пример: распределение Коши

Распределение Коши с параметром положения x_0 и масштабом $\gamma > 0$ имеет плотность

$$f_X(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right)^2 \right]}. \quad (3.7)$$

Та же форма известна как распределение Лоренца. В физике частиц она связана с нерелятивистской формой линии Брейта—Вигнера, а в спектроскопии описывает лоренцев профиль линии. Релятивистская форма Брейта—Вигнера записывается иначе, поэтому считать эти названия полными синонимами не следует.

При $x_0 = 0$ и $\gamma = 1$ получаем стандартное распределение Коши:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}. \quad (3.8)$$



БИОГРАФИЯ

Огюстен Луи Коши

1789–1857

Французский математик и инженер. Коши внёс определяющий вклад в математический анализ, дифференциальные уравнения и математическую физику. Распределение Коши служит важным примером тяжёлых хвостов: его математическое ожидание и дисперсия не существуют.

Источник: MacTutor; фото MacTutor

Возьмём две независимые величины

$$X, Y \sim \text{Cauchy}(0, 1). \quad (3.9)$$

Для суммы $S = X + Y$ формула свёртки даёт

$$f_S(s) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2) [1 + (s - x)^2]}. \quad (3.10)$$

В знаменателе стоит многочлен четвёртой степени по x . Интеграл можно взять разложением на простые дроби или методом вычетов, после чего ответ ещё придётся упростить. Задача поставлена одной строкой, а вычисление уже разрослось. Для суммы многих величин этот путь становится совсем непрактичным.

3.3. Характеристическая функция

Вместо самой плотности рассмотрим её преобразование Фурье. Для случайной величины X **характеристическая функция** определяется как [1]

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]. \quad (3.11)$$

Если X имеет плотность, математическое ожидание в формуле 3.11 записывается интегралом:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx. \quad (3.12)$$

Здесь x — переменная интегрирования, а t — аргумент характеристической функции. Само распределение вещественно, но его Фурье-образ в общем случае комплексный.

Характеристическая функция однозначно определяет распределение. Если плотность существует и выполнены обычные условия теоремы обращения Фурье, её можно восстановить по формуле

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt. \quad (3.13)$$

Преобразование Фурье переводит свёртку в произведение. Для независимых X и Y это видно непосредственно:

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] \\ &= \varphi_X(t) \varphi_Y(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Третье равенство и есть место, где используется независимость.

3.4. Сумма двух величин Коши через характеристические функции

Характеристическая функция стандартного распределения Коши равна

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|}. \quad (3.15)$$

Её можно получить из формулы 3.8 методом вычетов. Для двух независимых стандартных величин Коши формула 3.14 сразу даёт

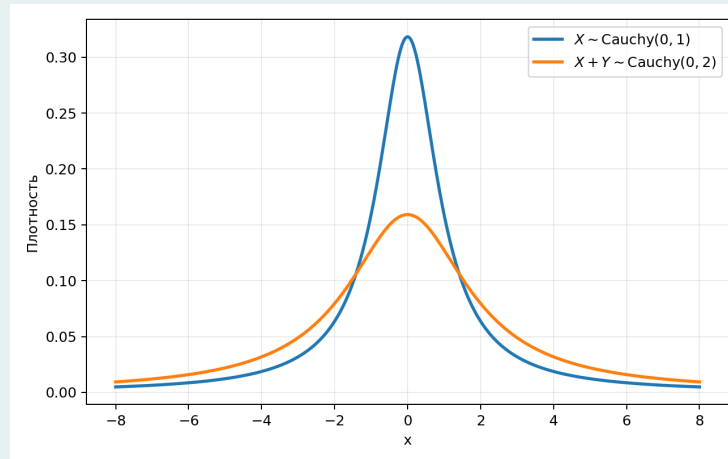
$$\varphi_{X+Y}(t) = e^{-|t|} e^{-|t|} = e^{-2|t|}. \quad (3.16)$$

Последнее выражение является характеристической функцией распределения Коши с масштабом $\gamma = 2$. Поэтому

$$S = X + Y \sim \text{Cauchy}(0, 2), \quad f_S(s) = \frac{2}{\pi(s^2 + 4)}. \quad (3.17)$$

Мы получили ответ, не вычисляя интеграл 3.10.

Стандартное распределение Коши и распределение суммы двух независимых стандартных величин Коши.



Интерактив. Сумма двух величин Коши

В HTML-книге график строится из характеристических функций исходной величины и её суммы с независимой копией.



У суммы максимум ниже, а распределение шире: параметр y увеличился с 1 до 2.

3.4.1. Вычисление распределения суммы через Фурье

Весь метод состоит из трёх операций.

01 Преобразовать плотности

Найти характеристические функции

$$\varphi_X(t) = \int e^{itx} f_X(x) dx, \quad \varphi_Y(t) = \int e^{ity} f_Y(y) dy. \quad (3.18)$$



02 Перемножить

Для независимой суммы использовать

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \quad (3.19)$$



03 Вернуться к плотностям

Выполнить обратное преобразование

$$f_{X+Y}(s) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-its} \varphi_{X+Y}(t) dt. \quad (3.20)$$

Для десяти слагаемых вместо девятикратной свёртки получается произведение десяти функций и одно обратное преобразование.

Тот же приём используется при восстановлении сигнала на фоне независимого шума. Если $D = S + N$, то $\varphi_D = \varphi_S \varphi_N$. Измерив шум отдельно, можно найти φ_S делением. На практике это деление усиливает высокочастотные флуктуации и требует регуляризации. Преобразование Фурье упрощает алгебру, но не улучшает качество данных.

3.5. Свойства характеристической функции

3.5.1. Дискретный случай

Если X принимает значения x_k с вероятностями p_k , интеграл заменяется суммой:

$$\varphi_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}. \quad (3.21)$$

Это то же распределение, записанное в форме, удобной для сложения случайных величин.

3.5.2. Почему характеристическая функция всегда существует

Модуль комплексной экспоненты равен единице. Поэтому

$$|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = 1. \quad (3.22)$$

В отличие от математического ожидания $\mathbb{E}[X]$ или дисперсии, интеграл в определении характеристической функции не страдает от тяжёлых хвостов: подынтегральная функция по модулю ограничена единицей. Характеристическая функция существует у любого распределения.

3.5.3. Базовые свойства

Для любой случайной величины выполняются соотношения

$$\varphi_X(0) = 1, \quad |\varphi_X(t)| \leq 1, \quad \varphi_X(-t) = \varphi_X^*(t). \quad (3.23)$$

Первое равенство выражает нормировку вероятности: $\varphi_X(0) = \mathbb{E}[1] = 1$. Третье следует из комплексного сопряжения экспоненты. Для распределения, симметричного относительно нуля, характеристическая функция вещественна и чётна.

3.5.4. Сдвиг и масштаб

Пусть $Y = aX + b$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] \\ &= e^{itb} \mathbb{E}[e^{i(at)X}] \\ &= e^{itb} \varphi_X(at). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Сдвиг случайной величины даёт фазовый множитель, а изменение масштаба меняет аргумент характеристической функции.

3.6. Суммы многих независимых величин

Последовательно применяя формулу 3.14 к $S_n = X_1 + \dots + X_n$, получаем

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t). \quad (3.25)$$

Если все слагаемые имеют одно распределение,

$$\varphi_{S_n}(t) = [\varphi_X(t)]^n. \quad (3.26)$$

Ради этих двух формул характеристические функции и вводят в задачах о суммах.

3.7. Примеры характеристических функций

3.7.1. Распределение Бернулли

Величина Бернулли принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - p$. По формуле 3.21

$$\varphi_X(t) = (1 - p)e^{it \cdot 0} + pe^{it \cdot 1} = (1 - p) + pe^{it}. \quad (3.27)$$

Сумма $S_n = X_1 + \dots + X_n$ считает число единиц в n независимых испытаниях. Её характеристическая функция равна

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(t) &= [(1 - p) + pe^{it}]^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k e^{itk}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Коэффициент при e^{itk} равен вероятности $P(S_n = k)$. Мы снова получили биномиальное распределение:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad S_n \sim \text{Bin}(n, p). \quad (3.29)$$

Другого ответа и быть не могло: сумма нулей и единиц как раз считает число успехов. Характеристическая функция показывает это непосредственно в алгебраической форме.

3.7.2. Распределение Пуассона

Для $N \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \varphi_N(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \\ &= \exp[\lambda(e^{it} - 1)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Пусть независимые величины N_k имеют параметры λ_k . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_k N_k}(t) &= \prod_k \exp[\lambda_k(e^{it} - 1)] \\ &= \exp\left[\left(\sum_k \lambda_k\right)(e^{it} - 1)\right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Получилась характеристическая функция Пуассона с параметром $\sum_k \lambda_k$:

$$\sum_k N_k \sim \text{Pois}\left(\sum_k \lambda_k\right). \quad (3.32)$$

Это соответствует устройству опыта. Если несколько независимых источников дают в среднем $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ событий за один интервал времени, общий счёт имеет среднее $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots$.

3.7.3. Распределение Гаусса

Для $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \quad (3.33)$$

Вывод

3.7.3.1. Вывод характеристической функции Гаусса

Сначала рассмотрим стандартную нормальную величину $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} e^{-z^2/2} dz. \quad (3.34)$$

Продифференцируем по t и проинтегрируем по частям, используя $ze^{-z^2/2} = -d(e^{-z^2/2})/dz$:

$$\begin{aligned} \varphi'_Z(t) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{itz} e^{-z^2/2} dz \\ &= -t\varphi_Z(t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Условие $\varphi_Z(0) = 1$ выбирает решение

$$\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2}. \quad (3.36)$$

Поскольку $X = \mu + \sigma Z$, правило сдвига и масштаба 3.24 даёт формулу 3.33.

Для независимых $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ произведение характеристических функций равно

$$\varphi_{\sum_k X_k}(t) = \exp\left[it \sum_k \mu_k - \frac{t^2}{2} \sum_k \sigma_k^2\right]. \quad (3.37)$$

Это снова гауссова характеристическая функция. Следовательно,

$$\sum_k X_k \sim \mathcal{N}\left(\sum_k \mu_k, \sum_k \sigma_k^2\right). \quad (3.38)$$

У независимых гауссовых величин складываются средние и дисперсии. Стандартные отклонения складывать нельзя.

3.7.4. Распределение Коши

Для независимых $X_k \sim \text{Cauchy}(0, 1)$

$$\varphi_{S_n}(t) = \left(e^{-|t|}\right)^n = e^{-n|t|}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k. \quad (3.39)$$

Поэтому $S_n \sim \text{Cauchy}(0, n)$. После деления суммы на n масштаб возвращается к единице:

$$\frac{S_n}{n} \sim \text{Cauchy}(0, 1). \quad (3.40)$$

Среднее арифметическое имеет то же распределение, что и каждое слагаемое. Оно не сжимается с ростом n . К этому примеру мы вернёмся при обсуждении условий центральной предельной теоремы.

3.8. Моменты из характеристической функции

Разложим комплексную экспоненту около $t = 0$:

$$e^{itX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!}. \quad (3.41)$$

Если соответствующие моменты существуют и разрешено переставить математическое ожидание и сумму, то

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n]. \quad (3.42)$$

Отсюда моменты извлекаются производными в нуле:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{i^n} \varphi_X^{(n)}(0). \quad (3.43)$$

В частности,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\varphi_X'(0)}{i}, \quad \mathbb{E}[X^2] = -\varphi_X''(0). \quad (3.44)$$

Слово «если» перед формулой 3.42 нельзя выбрасывать. Сама характеристическая функция существует всегда, её производные нужного порядка — нет.

Для стандартного распределения Коши

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|}. \quad (3.45)$$

У этой функции нет производной при $t = 0$. Тот же факт виден в обычном пространстве: интеграл для $\mathbb{E}[X]$ не сходится абсолютно. Односторонняя производная или главное значение интеграла не заменяют математического ожидания.

3.9. Кумулянты

Произведение характеристических функций удобно превратить в сумму. Для этого берётся логарифм:

$$K_X(t) = \ln \varphi_X(t). \quad (3.46)$$

Поскольку $\varphi_X(0) = 1$ и φ_X непрерывна, в некоторой окрестности нуля она не обращается в нуль. Там можно выбрать непрерывную ветвь логарифма с $K_X(0) = 0$. Если нужные производные существуют, разложение имеет вид

$$K_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{(it)^n}{n!}, \quad (3.47)$$

а коэффициенты κ_n называются **кумулянтами**:

$$\kappa_n = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dt^n} \ln \varphi_X(t) \Big|_{t=0}. \quad (3.48)$$

3.9.1. Первые четыре кумулянта

Для первой производной

$$K'_X(0) = \frac{\varphi'_X(0)}{\varphi_X(0)} = i\mathbb{E}[X]. \quad (3.49)$$

Для второй

$$\begin{aligned} K''_X(0) &= \varphi''_X(0) - [\varphi'_X(0)]^2 \\ &= -\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= -\text{Var}(X). \end{aligned} \quad (3.50)$$

После деления на соответствующие степени i получаем

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mu, \\ \kappa_2 &= \sigma^2, \\ \kappa_3 &= \mathbb{E}[(X - \mu)^3], \\ \kappa_4 &= \mathbb{E}[(X - \mu)^4] - 3\sigma^4. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Первые два кумулянта — среднее и дисперсия. Третий равен третьему центральному моменту; после деления на σ^3 он даёт коэффициент асимметрии. Четвёртый измеряет отклонение четвёртого центрального момента от гауссова значения $3\sigma^4$; деление на σ^4 даёт эксцесс.

3.9.2. Почему кумулянты удобны для сумм

Для независимых X и Y

$$\begin{aligned} K_{X+Y}(t) &= \ln[\varphi_X(t)\varphi_Y(t)] \\ &= K_X(t) + K_Y(t). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Значит, каждый существующий кумулянт суммы равен сумме кумулянтов:

$$\kappa_n(X + Y) = \kappa_n(X) + \kappa_n(Y). \quad (3.53)$$

Для изменения масштаба действует правило

$$\kappa_n(aX) = a^n \kappa_n(X). \quad (3.54)$$

У обычных моментов суммы появляются смешанные члены. Кумулянты независимых слагаемых складываются без таких членов, что особенно удобно для нормированных сумм.

3.10. Мост к центральной предельной теореме

Пусть $X_1, \dots, X_n$ независимы, имеют одно распределение и конечные среднее и дисперсию:

$$\mathbb{E}[X_k] = \mu, \quad \text{Var}(X_k) = \sigma^2 < \infty. \quad (3.55)$$

Рассмотрим центрированную и нормированную сумму

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu). \quad (3.56)$$

Введём $Y_k = (X_k - \mu)/\sigma$. Тогда $E[Y_k] = 0$, $\text{Var}(Y_k) = 1$ и

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right]^n. \quad (3.57)$$

Конечность второго момента даёт при $u \rightarrow 0$ разложение

$$\varphi_Y(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2). \quad (3.58)$$

Подставляя $u = t/\sqrt{n}$, получаем

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n. \quad (3.59)$$

При каждом фиксированном t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = e^{-t^2/2}. \quad (3.60)$$

Справа стоит характеристическая функция $\mathcal{N}(0, 1)$. Теорема непрерывности Леви переводит сходимость характеристических функций в сходимость по распределению [1]. Полную формулировку центральной предельной теоремы и скорость приближения мы разберём в следующей главе.

Нормировка в формуле 3.56 обязательна. Сама сумма имеет среднее $n\mu$ и дисперсию $n\sigma^2$; её центр и ширина растут вместе с n . Для среднего арифметического та же нормированная величина записывается как

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}. \quad (3.61)$$

Отсюда возникает знакомый масштаб статистической неопределённости среднего $1/\sqrt{n}$.

3.10.1. Тот же предел через кумулянты

Если кумулянт порядка r существует, правила 3.53 и 3.54 дают

$$\kappa_r(Z_n) = n^{1-r/2} \kappa_r(Y). \quad (3.62)$$

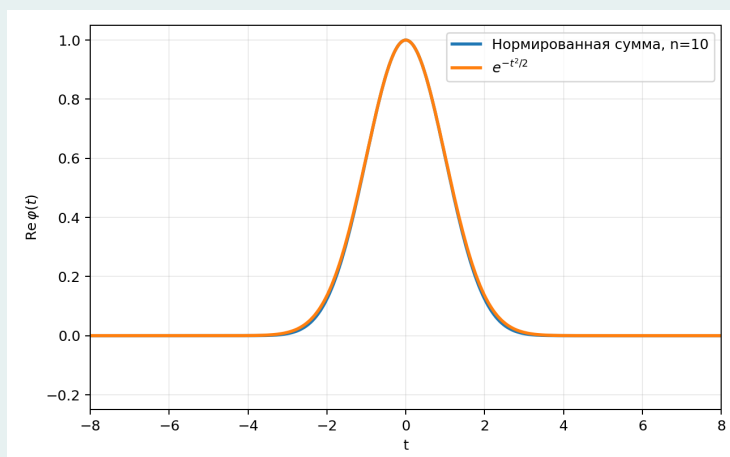
При $r = 2$ дисперсия остаётся равной единице. Третий кумулянт убывает как $1/\sqrt{n}$, четвёртый — как $1/n$, а каждый существующий кумулянт порядка $r > 2$ стремится к нулю. Если высшие кумулянты существуют, в разложении остаётся квадратичный член $\ln \varphi(t) = -t^2/2$, соответствующий распределению Гаусса.

3.11. Интерактив: приближение к распределению Гаусса в пространстве Фурье

Возьмём независимые величины

$$X_k \sim U(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad E[X_k] = 0, \quad \text{Var}(X_k) = 1. \quad (3.63)$$

На графике сравниваются характеристическая функция нормированной суммы и предельная функция $e^{-t^2/2}$. Ползунок меняет число слагаемых n .



Интерактив. Гауссов предел в пространстве Фурье

Меняя число слагаемых, можно проследить, как характеристическая функция нормированной суммы приближается к $e^{-t^2/2}$.



Итоги главы

- Характеристическая функция является преобразованием Фурье распределения и существует для любой случайной величины.
- Для суммы независимых величин характеристические функции перемножаются. Это заменяет последовательные свёртки плотностей обычным произведением.
- Моменты связаны с производными $\varphi_X(t)$ в нуле, а кумулянты — с производными $\ln \varphi_X(t)$. Характеристическая функция существует всегда; нужных производных у неё может не быть.
- У нормированной суммы сохраняется дисперсия, а вклад высших существующих кумулянтов убывает с ростом числа слагаемых. Так характеристические функции приводят к гауссову пределу.

3.12. Задачи

Задача 1. Сумма двух равномерных величин

Пусть независимые случайные величины распределены равномерно:

$$X, Y \sim U(0, 1), \quad f_X(x) = f_Y(x) = \theta(x)\theta(1-x).$$

Для суммы $S = X + Y$:

1. Вычислите плотность $f_S(s)$ непосредственно как свёртку.
2. Покажите, что произведение θ -функций ограничивает область интегрирования условием

$$\max(0, s-1) \leq x \leq \min(1, s).$$

3. Получите кусочно заданную треугольную плотность и проверьте её нормировку.
4. Найдите характеристическую функцию $\varphi_X(t)$.
5. Используя $\varphi_S(t) = \varphi_X(t)^2$, получите тот же ответ через обратное преобразование Фурье.
6. Нарисуйте плотности $f_X(x)$ и $f_S(s)$ и объясните форму распределения суммы.

Задача 2. Распределение Бернулли

Пусть

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p.$$

1. Найдите $\varphi_X(t)$.
2. Найдите характеристическую функцию суммы n независимых величин Бернулли.
3. Объясните, почему сумма имеет биномиальное распределение.

Задача 3. Сумма пуассоновских величин

Для независимых

$$N_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1), \quad N_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$$

покажите с помощью характеристических функций, что

$$N_1 + N_2 \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Задача 4. Сумма гауссовых величин

Пусть независимые величины распределены как

$$X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2).$$

Покажите, что

$$\sum_k X_k \sim N\left(\sum_k \mu_k, \sum_k \sigma_k^2\right).$$

Задача 5. Моменты и производные

Для

$$\varphi_N(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)]$$

найдите $E[N]$, $E[N^2]$ и $\text{Var}(N)$ через производные в нуле.

Задача 6. Распределение Коши

Для

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|}$$

объясните, почему $\varphi'_X(0)$ не существует, и покажите, что

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

имеет то же распределение Коши.

Задача 7. Распределение $S_n = X_1 + \dots + X_n$ в пределе $n \rightarrow \infty$

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad \langle X \rangle_n = \frac{S_n}{n}.$$

Среднее и вариация X_i :

$$E[X_i] = \mu, \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

Рассмотрим нормированную сумму

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

- Покажите, что характеристическая функция Z_n имеет вид

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[e^{-it\mu/(\sigma\sqrt{n})} \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n.$$

- Для каждого из следующих распределений найдите характеристическую функцию и предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t).$$

Симметричное распределение Бернулли:

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

Равномерное распределение:

$$X \sim U(-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

Экспоненциальное распределение:

$$X \sim \text{Exp}(1).$$

Распределение Пуассона:

$$X \sim \text{Pois}(\lambda).$$

- Убедитесь, что во всех четырёх случаях получается один и тот же предел:

$$\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Литература

[1] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley & Sons. 1971.