

Экзаменационные проекты по квантовой теории поля

Весенний семестр

Д. В. Наумов

<https://neutrinohit.github.io/ru/qft-exams.html>

Экзамен по курсу «Квантовая теория поля для экспериментаторов» проходит в виде мини-проектов. Каждый студент получает собственную задачу и примерно неделю на подготовку. Каждый проект — небольшая научная работа: теория, расчёт, моделирование и сравнение с экспериментом.

Цели

- Применение полученных знаний для решения реальных научных задач.
- Освоение научных инструментов: $\text{\LaTeX}$, git, python.
- Развитие навыков совместной работы над проектами.
- Критическое мышление и креативность: проекты побуждают находить нестандартные решения и аргументировать их.

Структура отчёта

1. Введение: мотивация, краткий обзор литературы, постановка задачи.
2. Теоретическая часть: выводы, расчёты, формулы.
3. Практическая часть: моделирование, анализ данных, расчёты.
4. Обсуждение: графики, таблицы, интерпретация результатов.
5. Выводы: основные результаты, предложения по продолжению работы.
6. Список литературы: все использованные источники.

Технические аспекты

- Оформление проекта в $\text{\LaTeX}$; можно использовать онлайн-сервис overleaf.com.
- Фейнмановские диаграммы — пакет `tikz-feynman`.
- Графики — библиотека `matplotlib`.

Содержание

1	Могут ли массы зависеть от координаты?	3
2	Стандартная модель на Z -полусе	4
3	Солнечные нейтрино	5
4	Реликтовые нейтрино	6
5	Реакторные антинейтрино	7

6	Нейтральный пион	8
7	Резонанс Глэшоу	9
8	Нейтральные каоны	10
9	Распад бозона Хиггса	12
10	Радиационная нейтринная опасность	13
11	Когда вакуум становится призмой	14
12	Недолгая жизнь ортопозитрония	15
13	Излучение Вавилова–Черенкова	16
14	Космологическая постоянная	17
15	Функциональный интеграл	18
16	Теории Великого Объединения	19
17	Ширина нестабильных частиц	20
18	Поляризационные очки и КЭД	21

1. Могут ли массы зависеть от координаты?

В хиггсовском механизме массы калибровочных и фермионных полей определяются вакуумным средним (VEV) скалярного поля. Возникает естественный вопрос: *а можно ли сделать это среднее зависящим от координаты?* На первый взгляд, распределение вида

$$|\phi(x)|^2 = \frac{v^2}{2}, \quad \phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \theta(x) \\ \cos \theta(x) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет минимуму потенциала и вроде бы разрешено. Тогда массы частиц можно было бы варьировать от точки к точке. В этом проекте вы разберётесь, почему это не так.

Теоретическая часть

✓ Убедитесь, что любая конфигурация с $|\phi(x)|^2 = \frac{v^2}{2}$ даёт нуль потенциала. Покажите, что для произвольной $\theta(x)$ лагранжиан приобретает дополнительную плотность энергии за счёт производных:

$$\mathcal{E}_{\text{grad}} \sim (\partial_\mu \theta)^2.$$

✓ Вычислите вклад в полную энергию поля от конфигурации $\theta(x) = \theta_0 \sin(kx)$. Покажите, что градиентный член неотрицателен и минимален при $\partial_\mu \theta = 0$.

✓ Подсчитайте типичную плотность энергии в таких конфигурациях и сравните её с плотностью энергии Вселенной сегодня ($\sim 10^{-47}$ ГэВ⁴). Что нужно, чтобы эффект был заметен?

✓ Оцените характерное время сползания такой конфигурации в вакуум (время релаксации). Какое оно для $k^{-1} \sim 1$ Мпк? Можно ли наблюдать остатки такого сползания сегодня?

✓ Что происходит с бозонами Голдстоуна при локальной симметрии? Объясните, как $\theta(x)$ «съедается» калибровочным полем и становится продольной поляризацией массивного калибровочного бозона. Почему при локальной симметрии $\theta(x)$ можно убрать калибровочным преобразованием и массы частиц от неё не зависят?

✓ Обсудите: если бы массы частиц действительно зависели от координаты, как бы это отразилось на:

- спектрах далёких атомов;
- отношении частот переходов в разных частях Вселенной;
- гравитационном линзировании и наблюдаемом составе звёзд.

Наблюдательные ограничения

✓ Ознакомьтесь с результатами:

- поиска вариаций фундаментальных констант: см. данные из спектров квазаров (например, [1]);
- экспериментов с атомными часами (разность частот при перемещении по гравитационному потенциалу);
- ограничений на наличие доменных стен и других следов неоднородной фазы.

✓ Сделайте вывод: действительно ли $|\phi(x)| = \text{const}$ — единственно возможное состояние хиггсовского поля во Вселенной? Или есть шанс, что где-то масса электрона была другой?

2. Стандартная модель на Z -полюсе

Эксперименты на большом электрон-позитронном коллайдере (LEP) в ЦЕРН стали определяющими в прецизионных исследованиях электрослабых взаимодействий.

(i) Рассмотрите распад $Z \rightarrow f\bar{f}$. Массой фермионов пренебрегаем.

а) Покажите, что суммарная поляризация пары фермионов может быть найдена, измерив асимметрию

$$A_{LR}^f = \frac{\Gamma(Z \rightarrow f_L \bar{f}_R) - \Gamma(Z \rightarrow f_R \bar{f}_L)}{\Gamma(Z \rightarrow f_L \bar{f}_R) + \Gamma(Z \rightarrow f_R \bar{f}_L)}. \quad (1)$$

б) Выразите A_{LR}^f через электрический заряд Q_f , третью проекцию слабого изоспина T_3^f фермиона и $\sin^2 \theta_w$ в Стандартной модели.

с) Вычислите A_{LR}^f для заряженных лептонов, нейтрино, кварков.

(ii) Определим асимметрию «вперёд-назад» для процесса $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ согласно

$$A_{FB}^f = \frac{\int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta} - \int_{-1}^0 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta}}{\int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta} + \int_{-1}^0 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta}}. \quad (2)$$

д) Найдите A_{FB}^f как функцию $\sqrt{s}$. Постройте график.

е) Покажите, что при $\sqrt{s} = m_Z$ асимметрии A_{LR}^f и A_{FB}^f связаны

$$A_{FB}^f = \frac{3}{4} A_{LR}^e A_{LR}^f. \quad (3)$$

ф) Покажите, что при $\sqrt{s} = m_Z$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) = \frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f})}{\Gamma^2(Z \rightarrow \text{all})}. \quad (4)$$

(iii) Обсудите, как изменятся $\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})$ и $\Gamma(Z \rightarrow \text{all})$ при наличии четвёртого типа нейтрино.

3. Солнечные нейтрино

В результате ядерных реакций в Солнце рождаются электронные нейтрино ν_e . Измерение потока солнечных нейтрино позволило нам доказать то, что в Солнце протекают ядерные реакции. Дефицит измеренного потока $\Phi(E)_{\nu_e}$ был объяснён Михеевым, Смирновым и Вольфенштейном как результат осцилляций нейтрино в веществе Солнца. Это позволило измерить угол смешивания θ_{12} и разницу квадратов масс нейтрино $\Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$.

(i) Вычислите сечения реакций $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$ (обмен W и Z бозонами), $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ (обмен Z бозоном). Нарисуйте график в зависимости от энергии нейтрино $E_\nu \in (1, 10)$ МэВ.

(ii) В эксперименте SuperKamioKande (Япония) взаимодействия солнечных нейтрино наблюдают, регистрируя черенковский свет от электронов отдачи. В модели с двумя типами нейтрино ν_e и ν_μ осцилляции нейтрино приводят к перераспределению потоков $\Phi_{\nu_e} \leftrightarrow \Phi_{\nu_\mu}$. Каким образом учёные пришли к выводу о дефиците числа электронов отдачи, если электроны появляются в обеих реакциях $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$ и $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$? Подкрепите ответ численными оценками.

(iii) Вычислите ожидаемое число событий в год появления электронов отдачи в водном детекторе массой 50 кт, предположив поток солнечных нейтрино $\Phi = 5.7 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ и среднюю энергию $\langle E_\nu \rangle = 8.5$ МэВ.

(iv) Электронное $|\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle$ и мюонное $|\nu_\mu\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle$ нейтрино — когерентные суперпозиции массовых состояний $|\nu_{1,2}\rangle$. В результате эффекта Михеева–Смирнова–Вольфенштейна для энергий $E_\nu \geq 5$ МэВ из Солнца выходят не $|\nu_e\rangle$ и не $|\nu_\mu\rangle$, а чистое массовое состояние $|\nu_2\rangle$. Пересмотрите пункты (i), (ii), (iii) в свете этого обстоятельства и обсудите ваши выводы.

4. Реликтовые нейтрино

Согласно современной космологической модели рождения и эволюции Вселенной, нас окружают так называемые *реликтовые нейтрино*. Их температура сегодня $T_\nu \approx 1.95 \text{ K}$ ($kT_\nu \approx 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$), что делает их наблюдение очень сложным делом. Тем не менее, давайте что-нибудь придумаем. Нобелевская гарантирована!

(i) Вычислите сечение реакции $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ для энергии реликтового нейтрино. Вычислите необходимую массу свободных нейтронов, чтобы за год обнаружить 100 таких событий. Есть ли у нас в наличии подходящий источник свободных нейтронов с нужной массой?

Если нет, предложите атомное ядро, которое можно было бы использовать вместо свободных нейтронов.

(ii) Рассмотрим другой проект — ускоритель частиц. Если ускорить в нём электрон или мюон до достаточно большой энергии, становится возможной реакция исчезновения лептона после взаимодействия с реликтовым антинейтрино $\bar{\nu}_\ell + \ell^- \rightarrow \pi^-$ с рождением пиона.

а) Вычислите необходимую энергию лептона для того, чтобы такая реакция могла происходить.

б) Вычислите соответствующее сечение реакции.

с) Оцените необходимую светимость ускорителя для обнаружения статистически значимого числа пионов.

(iii) Нет ли в реакции $\bar{\nu}_\ell + \ell^- \rightarrow \pi^-$ скрытого резонанса Глэшоу? (Обсудите эту идею с коллегой, разрабатывающим соответствующий проект.) Какие следствия это может дать?

(iv) Предложите свою идею, подкрепив предложение вычислениями, по регистрации реликтовых нейтрино.

5. Реакторные антинейтрино

Ядерные реакторы АЭС — интенсивные источники антинейтрино. Реактор изотропно излучает около $2 \cdot 10^{20}$ антинейтрино в секунду на каждый ГВт тепловой мощности. Рассмотрим проект экспериментов с реакторными нейтрино.

- (i) Вычислите сечение взаимодействия $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$.
- (ii) Оцените число таких взаимодействий в год при $E_{\bar{\nu}} = 4$ МэВ от типичного реактора мощностью 3 ГВт. Мишенью служит вода массой 20 т. Расстояние между детектором и реактором 2 км.
- (iii) Оцените массу детектора, необходимую, чтобы зарегистрировать 10^5 событий $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ в детекторе на расстоянии $L = 50$ км от реакторов общей мощностью 30 ГВт. Учтите эффект осцилляций нейтрино.

6. Нейтральный пион

В столкновениях e^+e^- можно наблюдать столкновения почти реальных фотонов, испущенных электронами и позитронами под малыми углами к оси пучка. В таких столкновениях фотоны могут рождать нейтральный пион. Сечение этой реакции пропорционально ширине распада $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ и даёт способ её измерить.

(i) Вычислите сечение реакции $\gamma + \gamma \rightarrow \pi^0$ в КЭД:

$$\sigma(\gamma + \gamma \rightarrow \pi^0) = \frac{8\pi^2 \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)}{m_\pi} \delta((p+k)^2 - m_\pi^2), \quad (5)$$

где p, k — 4-импульсы фотонов (формула Лоу; фотоны не поляризованы).

(ii) Проверьте, что матричный элемент реакции $\gamma + \gamma \rightarrow \pi^0$ отличен от нуля только тогда, когда спиральности фотонов одинаковы (для линейных поляризаций — когда они взаимно перпендикулярны).

(iii) Проверьте, что в распаде $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ комбинация $(E_1 + E_2) \cdot (B_1 + B_2)$ отлична от нуля только при тех же поляризациях фотонов.

7. Резонанс Глэшоу

Нейтринные телескопы IceCube, Baikal-GVD, KM3NeT, P-ONE нацелены на идентификацию астрофизических источников нейтрино сверхвысоких энергий.

(i) Не пренебрегая q^2 по сравнению с m_W^2 в пропагаторе W -бозона вычислите сечение глубоко-неупругих реакций $\nu_\ell + N \rightarrow \ell^- + X$ и $\bar{\nu}_\ell + N \rightarrow \ell^+ + X$ (X — адроны). Постройте графики в зависимости от энергии нейтрино. Воспользуйтесь, например, библиотекой `lhapdf` для кварковых распределений.

(ii) Оцените длину поглощения нейтрино и антинейтрино. Определите энергию, начиная с которой Земля перестаёт быть прозрачной для них.

(iii) Вычислите сечение реакции $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow W^-$ (резонанс Глэшоу). Почему он так называется? Сравните вычисленное сечение с сечениями из (i). Есть ли аналогичный резонанс для ν_e ? Почему?

(iv) Вычислите сечения реакций $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\ell + \ell^-$, $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow X$ в области резонанса Глэшоу. Сравните вычисленные сечения с сечениями из (i) на одном графике.

(v) Что нового может дать наблюдение резонанса Глэшоу? Сделайте краткий обзор экспериментального статуса.

(vi) Оцените объём водного телескопа, который сможет зарегистрировать одно такое событие в год.

8. Нейтральные каоны

Система нейтральных каонов представляет собой уникальную лабораторию для изучения квантовых осцилляций и СР-нарушения. В этом проекте мы сосредоточимся на точном измерении параметра ε , характеризующего нарушение СР-инвариантности.

Теоретическая часть

✓ Что такое K^0 , $\bar{K}^0$, K_S , K_L , K_1 , K_2 ?

Свяжите эти состояния друг с другом, наподобие:

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(|K_2\rangle + \varepsilon|K_1\rangle), \\ |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(|K_1\rangle + \varepsilon|K_2\rangle). \end{aligned} \quad (6)$$

✓ Выведите вероятности переходов: $P_{K^0 \rightarrow K^0}(t)$, $P_{K^0 \rightarrow \bar{K}^0}(t)$ в двух случаях: СР-симметрия сохраняется и СР-симметрия нарушается.

✓ Вычислите в рамках СМ разницу масс нейтральных каонов Δm . Объясните суть механизма GIM. Дайте оценку массы с-кварка.

✓ Получите выражения для вероятностей переходов, считая, что СР-симметрия сохраняется:

$$\begin{aligned} R_+ &= \Gamma(K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e), \\ R_- &= \Gamma(K^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e), \\ \bar{R}_+ &= \Gamma(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e), \\ \bar{R}_- &= \Gamma(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e). \end{aligned}$$

Вычислите асимметрию распада:

$$A = \frac{(R_+ + \bar{R}_+) - (R_- + \bar{R}_-)}{(R_+ + \bar{R}_+) + (R_- + \bar{R}_-)} = \frac{2e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} \cos \Delta m t}{e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t}}.$$

По ссылке [2] выложен пример псевдоданных с асимметрией распада. Заложены параметры $\tau_S = 8.954 \cdot 10^{-11}$ с, $\tau_L = 5.116 \cdot 10^{-8}$ с и некоторое значение Δm , которое вам надо восстановить.

Считаем далее, что СР-симметрия нарушается.

Если исследовать пучок нейтральных каонов при $t \gg \tau_S$, он будет состоять в основном из K_L .

✓ Покажите, что

$$\begin{aligned} \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e) &\propto |\langle \bar{K}^0 | K_L \rangle|^2 \propto |1 - \varepsilon|^2, \\ \Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) &\propto |\langle K^0 | K_L \rangle|^2 \propto |1 + \varepsilon|^2, \end{aligned}$$

и вычислите асимметрию

$$A = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) - \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) + \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)},$$

используя табличные значения.

✓ Покажите, как при помощи этой асимметрии объяснить инопланетянам, какой знак заряда у электронов в наших атомах.

✓ Покажите, используя бокс-диаграммы, что неравенство $\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) \neq \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)$ требует, чтобы СКМ-матрица смешивания кварков была комплексно-значной.

✓ Докажите, что отношение вероятностей распадов

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx |\varepsilon|^2. \quad (7)$$

Экспериментальная часть: псевдоданные

Вам предоставлены данные эксперимента в таблице. Восстановите $|\varepsilon|$, учитывая:

- Эффективность регистрации $\pi^+\pi^-$ в распадах K_S, K_L ,
- Вклад фоновых событий.

Таблица 1: Экспериментальные данные

Распад	Число событий	Эффективность (%)	Фон (%)
$K_S \rightarrow \pi^+\pi^-$	12 000	95	1
$K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$	72	90	10

Систематические неопределённости

Предполагая систематические неопределённости

- числа фоновых событий на уровне 5%,
- эффективности регистрации на уровне 2%,

приведите оценку $|\varepsilon|$, указав статистическую и систематическую неопределённости.

9. Распад бозона Хиггса

Рассмотрите распад бозона Хиггса на пару фермионов $f\bar{f}$.

Квантовое состояние фермионов имеет вид

$$|f\bar{f}\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_1}} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_2}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2) |f(\mathbf{p}_1, s_1), \bar{f}(\mathbf{p}_2, s_2)\rangle, \quad (8)$$

где $\tilde{\psi}$ — двухчастичная волновая функция фермионов в импульсном представлении, s_i — спинорные 4-векторы. В системе покоя фермиона $s = (0, \xi)$.

✓ Найдите $\tilde{\psi}$, используя матричный элемент:

$$\langle f(\mathbf{p}_1, s_1), \bar{f}(\mathbf{p}_2, s_2) | S - 1 | H \rangle.$$

✓ Теперь можно вычислить волновую функцию в координатном представлении:

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2) e^{+i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2)}.$$

Покажите, что $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ зависит от разности координат $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и вычислите волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$.

✓ Разложите волновую функцию в ряд по сферическим гармоникам и исследуйте её поведение в зависимости от $\xi_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}$, $\xi_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}$, $\xi_1 \cdot \xi_2$. Дайте интерпретацию.

10. Радиационная нейтринная опасность

Огромное количество нейтрино каждую секунду пронизывает Землю и её обитателей. Оцените влияние этих потоков на человека в терминах радиационной дозы.

- ✓ Вычислите сечение рассеяния нейтрино на электроне и глубоконеупругое сечение взаимодействия с нуклоном (используйте партонные распределения LHAPDF).
- ✓ Используйте потоки из литературы для солнечных, атмосферных, реликтовых нейтрино.
- ✓ Вычислите число взаимодействий в год в теле человека массой 70 кг, а также выделение энергии.
- ✓ Переведите полученное число взаимодействий в эквивалентную дозу (Зв/год), используя приближение:

$$D \approx N_{\text{events}} \cdot \langle E_{\text{dep}} \rangle \cdot \frac{Q}{m},$$

где $Q = 1$ — взвешивающий коэффициент для вторичных электронов и мюонов, $m = 70$ кг, а $\langle E_{\text{dep}} \rangle$ — средняя энергия, передаваемая телу за одно взаимодействие.

- ✓ Сравните полученную дозу с естественным фоном и допустимыми нормами. Сделайте вывод: опасны ли нейтрино?

11. Когда вакуум становится призмой

Ренормировка иногда воспринимается как формальный приём. Однако она вскрывает новый пласт реальности с реальными физическими эффектами. Один из них — **двойное лучепреломление вакуума** в сильном электромагнитном поле, следующее из лагранжиана Эйлера и Гейзенберга [3]. В этом проекте вы убедитесь в том, что квантовые флуктуации делают вакуум оптически анизотропной средой.

✓ В классической электродинамике лагранжиан поля имеет вид

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2).$$

Квантовые поправки, обусловленные виртуальными электрон-позитронными парами, приводят к нелинейным эффектам. При низких энергиях эффективный лагранжиан (лагранжиан Эйлера–Гейзенберга) принимает вид:

$$L_{\text{eff}} = L_0 + \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right].$$

(a) Выведите выражения для векторов индукции:

$$\mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{H} = -4\pi \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \mathbf{B}}.$$

(b) Сравните полученные материальные уравнения с уравнениями вакуума. Что изменилось?

✓ Линеаризуйте уравнения, предполагая, что поле состоит из фона $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ и малого возмущения $\delta\mathbf{E}, \delta\mathbf{B}$. Получите тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

✓ Запишите уравнения Максвелла для волнового возмущения. Найдите дисперсионное соотношение для волны, распространяющейся вдоль оси x , при условии, что постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z :

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z.$$

✓ Рассмотрите два случая:

(a) Электрическое поле волны параллельно $\mathbf{B}_0$ (направление поляризации вдоль оси z);

(b) Электрическое поле волны перпендикулярно $\mathbf{B}_0$ (поляризация вдоль оси y).

✓ Найдите показатели преломления $n_{\parallel}$ и $n_{\perp}$, и их разность:

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}.$$

✓ Предложите эксперимент для наблюдения двойного лучепреломления вакуума. Какой эффект можно использовать — интерференцию, вращение поляризации, фазовый сдвиг? Какие поля и чувствительность нужны?

12. Недолгая жизнь ортопозитрония

Позитроний — это связанное состояние электрона и позитрона, напоминающее водородоподобный атом. Его собственные состояния классифицируются по суммарному спину:

- *парапозитроний* (спин 0) распадается в основном на два фотона;
- *ортопозитроний* (спин 1) — на три.

В этом проекте вы исследуете механизм распада ортопозитрония, оцените его время жизни и увидите, как КЭД описывает распад составных частиц.

✓ Рассмотрите распад ортопозитрония в три фотона $o\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma$, предполагая, что система электрон-позитрон покоится (приближение $v \ll c$).

- Нарисуйте все шесть диаграмм, описывающих процесс в древесном приближении. Объясните, почему их именно шесть. Запишите полный матричный элемент $\mathcal{M}$, учитывая тождественность фотонов.
- Вычислите усреднённый по начальным и суммированный по конечным спинам модуль квадрата матричного элемента $|\mathcal{M}|^2$ в приближении покоящихся фермионов ($\mathbf{p} = \mathbf{p}' = 0$).
- Найдите дифференциальную вероятность по энергии одного из фотонов:

$$\frac{d\Gamma}{d\omega_1},$$

где ω_1 — энергия первого фотона в системе центра масс. Учтите симметрию процесса.

- Проведите интегрирование и получите полную ширину распада $\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)$. Используя

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma},$$

найдите время жизни ортопозитрония в вакууме.

- Модифицируйте расчёт, считая, что электрон и позитрон находятся в основном состоянии водородоподобного атома (волновая функция $\psi(0) \neq 0$). Как это повлияет на результат?

13. Излучение Вавилова–Черенкова

Электрон летит в однородной, прозрачной и немагнитной среде с показателем преломления $n > 1$. Если скорость электрона $v > 1/n$, то становится возможным распад $e(p) \rightarrow e(p') + \gamma(k)$, что приводит к излучению Вавилова–Черенкова. Энергия фотона $\omega_k = |\mathbf{k}|/n$. Его поляризация $\varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) = (0, \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}))$.

✓ Покажите, что квадрат матричного элемента, просуммированный по спинам конечного электрона и усреднённый по спинам начального электрона, равен

$$|\mathcal{M}|^2 = 4\pi\alpha \left(4 (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}))^2 - k^2 \right).$$

Из этого выражения видно, что фотон поляризован в плоскости рассеяния, образованной векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$.

✓ Покажите, что спектрально-угловое распределение излучения есть:

$$\frac{d^2\Gamma}{d\omega d\Omega_\gamma} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 v E^2} \delta \left(\cos \theta - \frac{1}{vn} - \frac{\omega(n^2 - 1)}{2vnE} \right),$$

из которого видно, что полярный угол вылета фотона (ось z направлена вдоль импульса начального электрона $\mathbf{p}$) фиксирован значениями энергии начального электрона и конечного фотона:

$$\cos \theta \equiv \cos \theta_0 = \frac{1}{vn} + \frac{\omega(n^2 - 1)}{2vnE}.$$

✓ Покажите, что спектральное распределение излучения есть:

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} = \alpha \left[v \sin^2 \theta_0 + \frac{\omega^2(n^2 - 1)}{2vE^2} \right].$$

Будущий лауреат Нобелевской премии Виталий Лазаревич Гинзбург решил эту задачу в 1940 году.

Если пренебречь величинами порядка ω/E , то получим классические результаты других нобелевских лауреатов И.Е. Тамма и И.М. Франка:

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} = \alpha v \sin^2 \theta_0, \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{vn}.$$

14. Космологическая постоянная

- ✓ Покажите, что ненулевая (бесконечная!) вакуумная плотность энергии квантового поля переопределяет космологическую постоянную в уравнениях Эйнштейна.
- ✓ Обсудите, как меняется решение, описывающее эволюцию однородной и изотропной Вселенной в зависимости от вклада в вакуумную энергию фермионных и бозонных полей.
- ✓ Исследуйте литературу с современными экспериментальными данными по измерению космологической постоянной в модели однородной и изотропной Вселенной. Укажите, какими свойствами должна обладать система, чтобы объяснить наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной.
- ✓ Рассмотрите простейшую суперсимметричную модель Весса–Зумино [4], содержащую один комплексный скаляр ϕ и один майорановский фермион ψ . Получите значение средней плотности энергии вакуума. Решает ли суперсимметрия проблему космологической постоянной?

15. Функциональный интеграл

- ✓ Рассмотрите функциональный интеграл для скалярного поля. Сформулируйте правила получения диаграмм Фейнмана из производящего функционала.
- ✓ Получите выражения для собственной энергии вакуума (плотности энергии нулевых колебаний) и изобразите соответствующие диаграммы Фейнмана для модели $\lambda\phi^4$.
- ✓ Покажите, что вакуумные петли («пузырьки») не дают вклада в амплитуды рассеяния.
- ✓ Проведите расчёт плотности энергии вакуума для скалярных, фермионных и массивных/безмассовых векторных полей. Запишите итоговое выражение для средней плотности энергии вакуума с учётом квантовых поправок.

16. Теории Великого Объединения

Этот раздел фокусируется на попытках объединения фундаментальных взаимодействий (сильного, слабого, электромагнитного) в рамках простых калибровочных групп, таких как $SU(5)$. Задачи включают построение модели, изучение механизма спонтанного нарушения симметрии, предсказание распада протона и генерацию масс нейтрино через минимальный оператор размерности 5.

✓ Рассмотрите калибровочную группу Стандартной модели (СМ) $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Опишите, как преобразуются поля СМ относительно калибровочных преобразований этой группы. Постройте ковариантные производные для полей СМ. Проведите процедуру спонтанного нарушения симметрии

$$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_{\text{em}}.$$

✓ Рассмотрите группу $SU(5)$ как группу ТВО. Покажите вложение $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \subset SU(5)$. Перечислите представления группы $SU(5)$, а также произведите размещение левых фермионов в $1 + \bar{5} + 10$ представлениях. Калибровочные бозоны в $SU(5)$.

✓ Спонтанное нарушение симметрии в $SU(5)$. Цепочка

$$SU(5) \rightarrow SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_{\text{em}}.$$

Проблема точной подстройки параметров Хиггса.

✓ Распад протона. Рассмотрите процесс $p \rightarrow \bar{\nu}\pi^+$ в эффективном низкоэнергетическом лагранжиане, рассчитайте среднее время жизни протона. Обсудите роль $B - L$ симметрии. Приведите современные экспериментальные ограничения на время жизни протона и опишите принцип работы детекторов, предназначенных для его поиска.

✓ Рассмотрите механизм seesaw (качелей) для генерации малых масс нейтрино. Ограничьтесь случаем одного поколения лептонов. Постройте наиболее общую юкавскую часть лагранжиана, включающую дираковский и майорановский массовые члены для нейтрино. Покажите, что в низкоэнергетическом эффективном действии возникает единственный массовый оператор размерности 5 (оператор Вайнберга). Получите предсказание массы нейтрино с масштабом GUT $\sim 10^{15}$ ГэВ.

17. Ширина нестабильных частиц

В нерелятивистской квантовой механике нестабильность частицы описывается комплексным потенциалом или функцией $\psi(t) \sim e^{-iEt - \Gamma t/2}$. В квантовой теории поля ширина распада возникает из мнимой части собственной энергии.

В этом проекте вы проследите, как ширина появляется из диаграмм и как она связана с наблюдаемыми величинами.

Теоретическая часть

✓ Пусть скалярное поле ϕ взаимодействует с лёгким полем χ через:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g\phi\chi^2.$$

Нарисуйте диаграмму собственной энергии ϕ второго порядка по g . Вычислите мнимую часть петли с помощью оптической теоремы.

✓ Покажите, что полю ϕ соответствует модифицированный пропагатор:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + im\Gamma}.$$

Объясните физический смысл Γ , сравнив с экспоненциальным законом распада.

✓ Покажите, что наблюдаемое сечение рассеяния на резонансе имеет форму Брейта–Вигнера:

$$\sigma(E) \propto \frac{1}{(E - m)^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

Выведите это выражение из полной амплитуды с промежуточным состоянием поля ϕ .

✓ Объясните, почему нельзя говорить о фиксированной массе нестабильной частицы. Каков смысл диаграммы с распадом $A \rightarrow B\phi \rightarrow B\chi\chi$?

✓ Обсудите, как ширина распада связана с измерением массы: почему масса Z -бозона определяется по положению пика сечения $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$, а ширина — по его форме?

Численный пример

✓ Рассчитайте ширину распада гипотетического скалярного поля $\phi \rightarrow \chi\chi$ при $m_\phi = 1$ ГэВ, $m_\chi = 0.2$ ГэВ, $g = 1$ ГэВ.

✓ Постройте график $\sigma(E)$ вблизи резонанса и покажите, как изменяется форма пика при увеличении Γ . Как ширина зависит от массы и связи?

✓ Найдите ширину реальных резонансов ρ , K^* , Δ из таблиц PDG. Сравните с формулой Брейта–Вигнера. Почему в некоторых случаях она плохо работает?

18. Поляризационные очки и КЭД

Поляризационные очки пропускают свет только одной линейной поляризации. Они полезны потому, что рассеянный и отражённый свет частично поляризован: при рассеянии света на электронах интенсивность рассеянного излучения зависит от его поляризации и угла рассеяния. В этом проекте вы покажете, что квантовая электродинамика точно предсказывает эту зависимость.

✓ Рассмотрите рассеяние фотона на свободном электроне. Найдите дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega$ в зависимости от поляризаций падающего и рассеянного фотонов.

✓ Предположив, что падающий свет неполяризован, покажите, что рассеянный фотон оказывается частично линейно поляризованным. Получите выражение для степени поляризации $\mathcal{P}(\theta)$ как функции угла между падающим и рассеянным фотоном:

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

Подсказка. Задача сильно упрощается, если энергия электрона в результате рассеяния света почти не меняется.

✓ Постройте график зависимости $\mathcal{P}(\theta)$. При каком угле рассеяния достигается максимальная поляризация?

Применения в физике и астрофизике

- **Поляризация неба.** Объясните, почему солнечный свет, рассеянный атмосферой, становится частично линейно поляризованным. При каком угле рассеяния поляризация максимальна? Почему это важно для астрономической фотографии, навигации и поляризационных очков?
 - **Почему дальнобойщики носят поляризационные очки?** Объясните, почему свет, отражённый от мокрого асфальта, частично поляризован. При каком угле падения поляризация максимальна? Достаточно ли расчёта в рамках КЭД (рассеяние на электроне), чтобы это описать, или нужно учитывать что-то ещё?
 - **Реликтовое излучение и эксперименты WMAP/Keck.** Объясните, как линейная поляризация реликтового излучения возникает в результате комптоновского рассеяния фотонов на электронах в ранней Вселенной.
 - **Поляризация звёздного света межзвёздной пылью.** Свет звёзд, прошедший через межзвёздную пыль, частично поляризован: вытянутые пылинки, выстроенные магнитным полем, поглощают одну поляризацию сильнее другой. Как это помогает изучать структуру магнитных полей в Галактике? Чем этот механизм отличается от поляризации при рассеянии?
 - **Диагностика плазмы.** Томсоновское рассеяние используется для измерения температуры и плотности электронов в лабораторной плазме. Объясните, как на практике использовать зависимость степени поляризации $\mathcal{P}(\theta)$ для диагностики, если известно направление падающего лазерного луча.
- ✓ Выберите одно из применений и подробно обсудите его.

Список литературы

- [1] J. K. Webb, J. A. King, M. T. Murphy et al., *Indications of a Spatial Variation of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. **107** 191101 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.191101>.
- [2] Наумов, Д. В., *Псевдоданные по асимметрии распада нейтральных каонов*. <https://neutrinohit.github.io/assets/qft-exams/kaon-asymmetry-pseudodata.txt>.
- [3] Heisenberg, Werner, Euler, Hans, *Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons*, Zeitschrift für Physik **98** 714–732 (1936).
- [4] Wess, Julius, Zumino, Bruno, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nucl. Phys. B **70** 39–50 (1974).