Экзаменационные проекты по квантовой теории поля

Осенний семестр

Д. В. Наумов

https://neutrinohit.github.io/ru/qft-exams.html

Экзамен по курсу «Квантовая теория поля для экспериментаторов» проходит в виде мини-проектов. Каждый студент получает собственную задачу и примерно неделю на подготовку. Каждый проект — небольшая научная работа: теория, расчёт, моделирование и сравнение с экспериментом.

Цели

- Применение полученных знаний для решения реальных научных задач.
- Освоение научных инструментов: LaTeX, git, python.
- Развитие навыков совместной работы над проектами.
- Критическое мышление и креативность: проекты побуждают находить нестандартные решения и аргументировать их.

Структура отчёта

1. Введение: мотивация, краткий обзор литературы, постановка задачи.
2. Теоретическая часть: выводы, расчёты, формулы.
3. Практическая часть: моделирование, анализ данных, расчёты.
4. Обсуждение: графики, таблицы, интерпретация результатов.
5. Выводы: основные результаты, предложения по продолжению работы.
6. Список литературы: все использованные источники.

Технические аспекты

- Оформление проекта в LaTeX; можно использовать онлайн-сервис overleaf.com.
- Фейнмановские диаграммы — пакет tikz-feynman.
- Графики — библиотека matplotlib.

Содержание

Квантование и нормальные моды **4**

1 Гармонический квантовый осциллятор **4**

Связанные состояния и спектры **6**

2 Атом водорода **6**

3 $\pi^+\pi^-$-атом 7

4 Резонансы и квазисвязанные состояния 8

Релятивистская квантовая механика 9

5 Парадокс Клейна 9

6 Уравнение Дирака в 1+1 измерениях 11

7 Релятивистский тремор и давление 12

8 γ матрицы Дирака 13

Спин и измерение 14

9 Эксперимент Штерна-Герлаха 14

10 Квантовый ластик и отложенный выбор 15

Симметрии и теорема Нётер 17

11 Симметрии уравнения Дирака 17

12 Симметрии σ-модели 18

13 Спектральный поток и киральная аномалия в 1+1 19

Вакуумные эффекты и границы 20

14 Эффект Казимира 20

15 Динамический эффект Казимира 21

Функции Грина и волновые задачи 22

16 Дифракция на отверстии 22

Причинность и дисперсия 23

17 Тахион 23

Геометрические эффекты 24

18 Фаза Берри **24**

Калибровочные поля и квантование движения **27**

19 Уровни Ландау: от нерелятивистских частиц к графену **27**

20 Эффект Аронова–Бома и калибровочная инвариантность **30**

1. Гармонический квантовый осциллятор

Цель: Изучить спектр энергий и динамику одномерной цепочки квантовых гармонических осцилляторов, включая анализ симметрий и визуализацию эволюции системы.

1. **Гамильтониан системы:** Рассмотрите одномерную цепочку из N идентичных атомов с расстоянием между соседними атомами a. Гамильтониан системы:

$$\widehat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\widehat{P}_i^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{N} (\widehat{X}_{i+1} - \widehat{X}_i)^2,$$

   где:

   - m — масса атома,
   - $k = m\omega^2$ — жёсткость связи между соседними атомами,
   - $\widehat{P}_i$ и $\widehat{X}_i$ — операторы импульса и координаты (отклонения от положения равновесия) i-го атома.

   Объясните, почему взаимодействие учитывается только между соседними атомами.

2. **Переход к операторам нормальных мод:** Определите операторы нормальных мод:

$$\widehat{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{ikan} \widehat{X}_n,$$

$$\widehat{\Pi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{-ikan} \widehat{P}_n,$$

   где $k = \frac{2\pi\ell}{Na}$, $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$.

   (a) Вычислите коммутаторы $[\widehat{Q}_k, \widehat{\Pi}_{k'}]$, $[\widehat{Q}_k, \widehat{Q}_{k'}]$, и $[\widehat{\Pi}_k, \widehat{\Pi}_{k'}]$.

   (b) Запишите гамильтониан $\widehat{H}$ через $\widehat{Q}_k$ и $\widehat{\Pi}_k$.

3. **Циклические граничные условия:** Предположите, что цепочка удовлетворяет циклическим граничным условиям:

$$\widehat{X}_{N+1} = \widehat{X}_1.$$

   (a) Найдите собственные частоты ω_k системы, где k — волновой вектор.

   (b) Покажите, что система эквивалентна набору независимых гармонических осцилляторов, каждый из которых соответствует своей моде k.

4. **Динамика атомов:**

   (a) Вычислите волновую функцию $\psi(t)$ системы.

   (b) Постройте анимацию среднего смещения атомов $\langle X_n \rangle(t)$ при различных начальных условиях:

   - Один атом смещён: $X_i(0) \neq 0$, остальные $X_n(0) = 0$.
   - Два атома смещены: $X_i(0) \neq 0$, $X_k(0) \neq 0$, остальные $X_n(0) = 0$.

5. **Симметрии и сохраняющиеся заряды:**

   (a) Найдите все симметрии задачи (например, трансляционная симметрия, инвариантность относительно сдвигов времени).

(b) Используя теорему Нётер, вычислите сохраняющиеся заряды, связанные с каждой симметрией.

(c) Объясните физический смысл этих зарядов (например, энергия, импульс, фазовая корреляция мод).

2. Атом водорода

1. Вычислите волновые функции атома водорода для $n = 1$, $j = 1/2$. Нарисуйте их. Сравните с решением уравнения Шрёдингера при $n = 1$.
2. Вычислите и нарисуйте спектр излучения атома водорода в теории Дирака.
3. Энергия уровней атома водорода в гравитационном поле звезды изменяется. Для фотонов, испускаемых атомами, это приводит к гравитационному красному смещению:

   $$z = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2},$$

   где G — гравитационная постоянная, M и R — масса и радиус звезды, соответственно. Вычислите $\Delta\nu/\nu$ для разных типов звёзд. Какие из них позволяют наблюдать *гравитационное* красное смещение? Сравните с экспериментом.

3. $\pi^+\pi^-$-атом

Цель: Исследовать свойства $\pi^+\pi^-$-атома с учётом кулоновского и сильного взаимодействий. Рассчитать энергию связи, поправку за счёт сильного взаимодействия и сравнить с экспериментальными данными.

1. **Кулоновская энергия связи:** Вычислите основное значение энергии $1s$-состояния с учётом только электромагнитного взаимодействия. Оцените величину боровского радиуса.
2. **Поправка от сильного взаимодействия:** Рассчитайте поправку ΔE к энергии связи $1s$-состояния по формуле:
$$\Delta E = \frac{\int\limits_0^\infty |R_{1s}|^2 V_{\text{strong}}(r) r^2 dr}{\int\limits_0^\infty |R_{1s}|^2 r^2 dr},$$
используя три различных потенциала для сильного взаимодействия:
   (a) *Контактный потенциал (дельта-функция):*
$$V_{\text{strong}}(r) = -\frac{4\pi a_0}{\mu}\delta^3(r),$$
   где $\mu = m_\pi$, $a_0 \approx 0.22\, m_\pi^{-1} \approx 0.31\,\text{fm}$ — длина рассеяния $\pi\pi$ в состоянии с изоспином $I = 0$.
   (b) *Потенциал конечного радиуса (ступенька):*
$$V_{\text{strong}}(r) = \begin{cases} -V_0, & r \le R_{\text{strong}}, \\ 0, & r > R_{\text{strong}}, \end{cases}$$
   где $V_0 \sim 100\,\text{MeV}$, $\quad R_{\text{strong}} \sim 1\,\text{fm}$.
   (c) *Юкавский потенциал:*
$$V_{\text{strong}}(r) = -g^2 \frac{e^{-\mu_s r}}{r},$$
   где g^2 — константа сильного взаимодействия, $\mu_s \sim 1\,\text{fm}^{-1}$.
3. Сравните полученные значения ΔE с экспериментальными данными.
4. Постройте графики зависимости ΔE от параметров a_0, V_0, g^2 для трёх предложенных моделей потенциала в сравнении с экспериментом.
5. Проанализируйте вклад сильного взаимодействия в общую энергию связи.

4. Резонансы и квазисвязанные состояния

Цель: Исследовать квазисвязанные состояния и резонансы в квантовой механике, связь ширины резонанса с временем жизни и интерпретацию резонансов как полюсов S-матрицы в комплексной плоскости энергии.

1. Рассмотрите одномерный потенциал:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

2. Найдите коэффициенты отражения и прохождения $R(E)$, $T(E)$.
3. Покажите наличие резонансных максимумов $T(E) \approx 1$ при $E > 0$.
4. Продолжите энергию в комплексную плоскость $E \longrightarrow E - i\Gamma/2$ и найдите условия полюсов S-матрицы.
5. Свяжите ширину резонанса Γ с временем жизни состояния

$$\tau \sim \frac{1}{\Gamma}.$$

6. Численно постройте:
   - $T(E)$,
   - траектории полюсов при изменении V_0 и a.
7. Обсудите, почему резонансы естественнее интерпретировать в языке рассеяния, а не «связанных состояний».

5. Парадокс Клейна

Цель: Исследовать рассеяние релятивистского фермиона на потенциальной ступеньке в рамках уравнения Дирака, понять происхождение так называемого парадокса Клейна и показать, что он исчезает при корректной интерпретации плотности тока и спектра состояний.

Рассматривается одномерная задача рассеяния фермиона массой m на потенциальной ступеньке

$$V(x) = V_0\,\theta(x),$$

в рамках одночастичного уравнения Дирака, *без* вторичного квантования.

1. **Уравнение Дирака в 1+1 измерениях**

   Рассмотрите стационарное уравнение Дирака

   $$\left[-i\gamma^0\gamma^1\partial_x + \gamma^0 m + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x).$$

   (a) Выберите явное представление γ-матриц в 1+1 измерениях.

   (b) Запишите уравнение в матричном виде и найдите плоские волновые решения в областях $x < 0$ и $x > 0$.

2. **Спектр и волновые векторы**

   Для областей:

   $$\text{I: } x < 0, \quad V = 0, \qquad \text{II: } x > 0, \quad V = V_0,$$

   найдите соответствующие волновые векторы k_1, k_2.

   (a) Покажите, что при

   $$E < V_0 - m$$

   волновой вектор k_2 остаётся вещественным.

   (b) Объясните, почему этот режим отсутствует в нерелятивистской теории.

3. **Граничные условия**

   Запишите полное решение в виде:

   $$\psi_I = \psi_{\text{in}} + R\,\psi_{\text{ref}}, \qquad \psi_{II} = T\,\psi_{\text{tr}},$$

   и наложите условия непрерывности волновой функции при $x = 0$.

   (a) Найдите коэффициенты отражения R и прохождения T.

   (b) Проверьте, что $R + T \neq 1$ при наивном определении вероятности.

4. **Плотность тока**

   Определите плотность тока Дирака

   $$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad j^x = \psi^\dagger\alpha\psi.$$

   (a) Вычислите ток для падающей, отражённой и прошедшей волн.

   (b) Покажите, что закон сохранения тока

   $$j_{\text{in}} = j_{\text{ref}} + j_{\text{tr}}$$

   выполняется *строго*.

(c) Объясните, почему при этом возможно $|R| > 1$.

5. **Групповая скорость и интерпретация**

   (a) Вычислите групповую скорость
   $$v_g = \frac{dE}{dk}$$
   в области II.

   (b) Покажите, что знак групповой скорости и знак тока совпадают.

   (c) Объясните, почему решение в области $x > 0$ соответствует состояниям с отрицательной энергией относительно локального вакуума.

6. **Физическая интерпретация**

   (a) Объясните исчезновение парадокса при интерпретации решений как состояний античастиц.

   (b) Обсудите, почему язык частиц и античастиц возникает уже на уровне одночастичного уравнения Дирака.

   (c) Сравните с нерелятивистским случаем (уравнение Шрёдингера).

7. **Численный анализ**

   С использованием `python`:

   (a) Постройте зависимости $R(E)$ и $T(E)$ для различных значений V_0.

   (b) Отметьте область $E < V_0 - m$.

   (c) Постройте токи j_{in}, j_{ref}, j_{tr} и проверьте их баланс.

8. **Обсуждение**

   (a) Где именно возникает «парадокс» при неправильной интерпретации?

   (b) Почему парадокс Клейна не является нарушением причинности?

   (c) Какие элементы этого анализа требуют вторичного квантования, а какие — нет?

9. **Литература**

- B. R. Holstein, *Klein's paradox*, Am. J. Phys. **66**, 507 (1998).
- P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*.
- W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*.

6. Уравнение Дирака в 1+1 измерениях

Рассмотрите уравнение Дирака в одном пространственном и одном временном измерениях.

1. Найдите явный вид γ^μ матриц, удовлетворяющих соотношению
$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$
2. Найдите γ^5.
3. Предполагая массу фермиона равной нулю, покажите, что получаются два независимых уравнения движения для частиц, движущихся влево и вправо.
4. Покажите, что сохраняются токи:
$$\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi\right) = 0, \quad \partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi\right) = 0.$$
5. Включите электрическое поле A^1, постоянное в пространстве и медленно меняющееся со временем. Найдите гамильтониан и его собственные значения, считая, что ось x имеет конечную длину L и накладывая периодические граничные условия. Нарисуйте спектр энергий для левых и правых фермионов.
6. Что произойдет со спектром энергии, если медленно изменить A^1 на
$$\Delta A^1 = \frac{2\pi}{eL}?$$

7. Релятивистский тремор и давление

1. Пусть при $t = 0$ состояние свободного электрона задаётся функцией

$$\psi(0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi d^2)^{3/4}} e^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Найдите $\psi(t, \boldsymbol{x})$ при $t > 0$.

2. Получите аналитическое выражение для среднего тока в виде интеграла по 3-импульсу:

$$\boldsymbol{J} = \int d^3x \psi^\dagger(x)\, \boldsymbol{\alpha}\, \psi(x)$$

3. Вычислите этот интеграл и создайте анимацию для $\boldsymbol{J}(t)$.
4. Вечен ли тремор тока?
5. Вычислите давление P поля и создайте анимацию для $P(t)$.
6. Объясните полученные результаты.

8. γ матрицы Дирака

1. Покажите, что коммутатор $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}]$ может быть записан через матрицы $\sigma_{\mu\nu}$. Найдите коэффициенты этого разложения.

2. Вычислите след
$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5\right).$$

3. Вычислите:
$$\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu}\gamma^\alpha\sigma^{\mu\nu}.$$

9. Эксперимент Штерна-Герлаха

Цель: Исследовать траектории спин-1/2 частицы в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B} = \nabla\Phi(x, y, z)$, используя уравнение Паули:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{(\widehat{\boldsymbol{P}} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right)\psi, \tag{2}$$

и теорему Эренфеста, и проанализировать влияние начального спина, неоднородности магнитного поля и начальных параметров частицы на её движение.

1. **Уравнения движения:** Используйте теорему Эренфеста для вычисления средних значений координат и импульса:

   $$\frac{d\langle\mathbf{r}\rangle}{dt} = \frac{\langle\mathbf{p}\rangle}{m}, \quad \frac{d\langle\mathbf{p}\rangle}{dt} = \langle\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})\rangle,$$

   где $\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma}$ — магнитный момент частицы (силой Лоренца здесь пренебрегаем).

2. **Начальные условия:**

   (a) Начальные координаты: $\langle\mathbf{r}(0)\rangle = (0, 0, 0)$.

   (b) Начальный импульс: $\langle\mathbf{p}(0)\rangle = (p, 0, 0)$.

   (c) Начальный спин: вдоль $+z$-оси ($\sigma_z = +1$) или $-z$-оси ($\sigma_z = -1$).

3. **Магнитное поле:** Рассмотрите неоднородное магнитное поле, заданное, например, через скалярный потенциал $\Phi(x, y, z)$:

   $$\mathbf{B} = \nabla\Phi(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z) = B_0 z + \frac{B_1}{2}(x^2 - y^2).$$

   Это поле приближённо моделирует реальную установку для эксперимента Штерна-Герлаха.

4. **Траектории:** Численно решите уравнения движения для средних координат $\langle x(t)\rangle$, $\langle y(t)\rangle$, $\langle z(t)\rangle$. Постройте траектории для частиц со спинами вдоль $+z$ и $-z$.

5. **Графики:**

   (a) Траектории $\langle x(t)\rangle$ и $\langle z(t)\rangle$ для разных значений начального импульса p, интенсивности поля B_0 и градиента B_1.

   (b) Сравнение отклонений для частиц с разными начальными спинами ($+z$ и $-z$).

6. **Анализ:** Объясните, как неоднородность поля (B_1) и параметры частицы (p, m, начальный спин) влияют на траектории. Укажите, почему сила Лоренца в этом эксперименте не влияет на разделение траекторий.

10. Квантовый ластик и отложенный выбор

Цель проекта: Математически разобрать и численно смоделировать один из самых контринтуитивных экспериментов квантовой механики. Показать, как информация о пути частицы (which-path information) разрушает интерференцию и как корреляция событий позволяет «восстановить» её, не нарушая при этом принцип причинности.

В основе проекта лежит модифицированный двухщелевой эксперимент, где координата частицы на экране x запутывается с её внутренней степенью свободы (например, спином).

1. Теоретическая часть: запутанность и фаза

Пусть состояния частицы, прошедшей через щели A и B, описываются функциями $\psi_A(x)$ и $\psi_B(x)$. Состояние системы перед экраном имеет вид:

$$|\Psi(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\psi_A(x)|\uparrow\rangle + \psi_B(x)|\downarrow\rangle\big).$$

1. **Уничтожение интерференции** Вычислите плотность вероятности обнаружения частицы на экране:
$$P(x) = \langle\Psi(x)|\Psi(x)\rangle.$$
Покажите, что из-за ортогональности спиновых состояний ($\langle\uparrow \mid \downarrow\rangle = 0$) интерференционный член исчезает. Объясните физический смысл: почему информация, которая *в принципе* может быть извлечена из спина, убивает волновую картину.

2. **Смена базиса (квантовый ластик)** Предположим, мы измеряем спин в диагональном базисе:
$$|+\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$
Перепишите состояние $|\Psi(x)\rangle$ в этом базисе и найдите совместные плотности вероятности $P(x,\pm) = |\langle\pm|\Psi(x)\rangle|^2$ для подвыборок частиц.

3. **Восстановление картины** Покажите, что в распределениях $P(x,+)$ и $P(x,-)$ интерференционные члены присутствуют, но сдвинуты по фазе на π. Докажите, что:
$$P(x,+) + P(x,-) = P(x).$$

2. Практическая часть: моделирование методом Монте-Карло

Для экспериментатора важно понимать, как «магия» превращается в статистику.

1. **Генерация данных** Используя `python`, сгенерируйте массив из 10^5 событий. Для каждого события:
   (a) Разыграйте координату x согласно распределению $P(x)$.
   (b) Для каждого x разыграйте результат измерения спина (+ или −) с вероятностями $P(x,+)/P(x)$ и $P(x,-)/P(x)$.

2. **Сортировка событий** Постройте общую гистограмму всех x. Затем, используя результаты измерения спина, постройте две отдельные гистограммы для «плюс-событий» и «минус-событий». Продемонстрируйте, как из бессистемного распределения возникают две интерференционные картины.

3. Обсуждение: причинность и «стирание прошлого»

1. **Парадокс отложенного выбора** Представьте, что спин измеряется *после* того, как частица попала на экран. Объясните, почему это не является сигналом из будущего в прошлое.
2. **Теорема о запрете сверхсветовой связи** Обсудите, может ли наблюдатель у экрана мгновенно узнать, какой базис для измерения спина выбрал его коллега в другом конце лаборатории.
3. **Интерпретация** Почему фраза «мы стёрли информацию о пути, и частица передумала» является методологически вредной для физика-исследователя?

4. Что сдать

1. Аналитический расчёт плотностей $P(x, \pm)$.
2. Скрипт на `python` с графиками: общее распределение (без интерференции) и две коррелированные гистограммы (с интерференцией).
3. Краткое эссе (0.5 страницы) с разрешением парадокса причинности.

Литература

- Y.-H. Kim, R. Yu, S.P. Kulik, Y. Shih, *A Delayed Choice Quantum Eraser*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1 (2000).
- Р. Фейнман, *Фейнмановские лекции по физике*, Том 3 (Квантовая механика).

11. Симметрии уравнения Дирака

1. Используя теорему Нётер, получите сохраняющийся ток для

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

при глобальных калибровочных преобразованиях

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi,\ \overline{\psi} \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}.$$

2. Используя теорему Нётер, получите сохраняющийся ток для $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi$ при киральном преобразовании

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi.$$

Получите закон преобразования поля $\bar{\psi}$.

3. Докажите, что действие для безмассового поля Дирака инвариантно при преобразованиях дилатации:

$$x \to x' = e^{-\rho}x, \quad \psi(x) \to \psi'(x') = e^{3\rho/2}\psi(x).$$

Найдите соответствующие нётеровский ток и заряд.

12. Симметрии σ-модели

Лагранжиан σ-модели:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi})\right] + i\overline{\Psi}\hat{\partial}\Psi + g\overline{\Psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\Psi$$
$$- \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2,$$

где

- $\sigma(x)$ — скалярное поле,
- $\boldsymbol{\pi}(x)$ — трёхкомпонентное скалярное поле,
- $\Psi(x)$ — дублет фермионных полей,
- $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули.

Симметрия: Докажите, что лагранжиан $\mathcal{L}$ обладает следующей симметрией:

$$\sigma(x) \to \sigma(x),$$

$$\boldsymbol{\pi}(x) \to \boldsymbol{\pi}(x) - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}(x),$$
$$\Psi(x) \to \Psi(x) + i\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\Psi(x),$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — 3-вектор бесконечно-малых параметров преобразования. Найдите соответствующий нётеровский ток.

13. Спектральный поток и киральная аномалия в 1+1

Цель: Понять происхождение киральной аномалии как геометрического эффекта, связанного со спектральным потоком уровней энергии.

1. Рассмотрите безмассовое уравнение Дирака в 1+1:

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = 0,$$

   на кольце длины L.

2. Наложите периодические граничные условия и найдите спектр энергий $E_n(A_1)$.

3. Медленно изменяйте $A_1(t)$ от 0 до

$$\Delta A_1 = \frac{2\pi}{eL}.$$

4. Постройте эволюцию уровней энергии и покажите, что уровни пересекают ноль.

5. Покажите, что число правых и левых состояний меняется, несмотря на формальное сохранение кирального тока.

6. Обсудите, почему это невозможно объяснить без учёта вакуума, даже в одночастичной постановке.

14. Эффект Казимира

1. Рассмотрите эффект Казимира в 3D. Вычислите давление притяжения пластин, используя формулу Эйлера-Маклорена.
2. Объясните природу притяжения пластин. Можно ли извлекать энергию из вакуума этим способом?
3. Оцените величину давления. Сравните с гравитационным притяжением пластин в зависимости от расстояния между ними.
4. Сделайте обзор экспериментальных методов и результатов измерения эффекта Казимира.

15. Динамический эффект Казимира

Цель: Исследовать рождение реальных квантов из вакуума при нестационарных граничных условиях.

1. Рассмотрите одномерное скалярное поле $\phi(t, x)$ с граничным условием:

   $$\phi(t, 0) = \phi(t, L(t)) = 0,$$

   где

   $$L(t) = L_0\big(1 + \epsilon \sin \omega t\big).$$

2. Найдите мгновенные моды поля и их частоты $\omega_n(t)$.

3. Покажите, что при резонансном условии

   $$\omega \approx 2\omega_n$$

   возникает экспоненциальный рост числа квантов.

4. Численно вычислите энергию излучения как функцию времени.

5. Обсудите физический смысл: откуда берётся энергия рождённых квантов (работа внешней силы, двигающей границу) и почему закон сохранения энергии выполняется.

16. Дифракция на отверстии

1. Рассмотрите рассеяние скалярного поля $\phi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, где $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$, в рамках уравнения Гельмголца.
2. Найдите функцию Грина уравнения Гельмголца.
3. Рассмотрите малое отверстие в непрозрачном экране в форме: а) квадрата, б) равностороннего треугольника.
4. Вычислите численно поле за экраном в дальней зоне.

17. Тахион

Тахион — это гипотетическая частица, движущаяся со скоростью, превышающей скорость света. Часто это интерпретируется как возможность передавать сверхсветовые сигналы. Исследуйте вопрос: так ли это?

1. Рассмотрите цепочку из маятников в однородном гравитационном поле, подвешенных к общему основанию и соединенных пружинками. Расстояние между маятниками равно a.

2. Покажите, что функция Лагранжа для этой системы имеет вид:

$$L = \sum_i \left(A\dot{\phi}_i^2 - B(\phi_i - \phi_{i-1})^2 - C(1 - \cos\phi_i) \right),$$

   где ϕ_i — угол отклонения i-го маятника от положения равновесия. Определите A, B, C.

3. Сделайте переход к бесконечному числу маятников в пределе $a \to 0$. Покажите, что лагранжиан эквивалентен

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - m^2(1 - \cos\phi).$$

4. Получите уравнение движения поля ϕ:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m^2 \sin\phi = 0.$$

5. В случае малого отклонения от положения устойчивого равновесия $\phi = 0$ получается обычное уравнение Клейна-Фока-Гордона:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m^2\phi = 0.$$

6. В случае малого отклонения от положения неустойчивого равновесия $\phi = \pi$ получается уравнение Клейна-Фока-Гордона с отрицательным квадратом массы:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - m^2\phi = 0.$$

   Формально, плоская волна $\phi = e^{-i\omega t + ikx}$ даёт:

$$\omega^2 = k^2 - m^2, \quad \text{и групповая скорость} \quad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{k}{\omega} > 1.$$

7. Покажите, что решение уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right)\phi = \delta(t)\delta(x)$$

   распространяется не быстрее света: запаздывающая функция Грина равна нулю вне светового конуса.

18. Фаза Берри

Краткая теоретическая справка: геометрическая фаза и калибровочная структура

Рассмотрим гамильтониан $H(\boldsymbol{R})$, зависящий от набора внешних параметров $\boldsymbol{R}$, и его собственные состояния

$$H(\boldsymbol{R})\,|n(\boldsymbol{R})\rangle = E_n(\boldsymbol{R})\,|n(\boldsymbol{R})\rangle,$$

предполагая, что уровень E_n невырожден.

Если параметры $\boldsymbol{R}(t)$ меняются медленно (адиабатически), то при начальном состоянии $|n(\boldsymbol{R}(0))\rangle$ решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)}\,|n(\boldsymbol{R}(t))\rangle,$$

где фаза $\alpha_n(t)$ удовлетворяет

$$\dot{\alpha}_n(t) = -E_n(t) + i\langle n(\boldsymbol{R}(t))|\dot{n}(\boldsymbol{R}(t))\rangle.$$

Интегрируя по времени, получаем

$$\alpha_n(T) = -\int_0^T E_n(t)\,dt + \gamma_{\mathrm{B}},$$

где

$$\gamma_{\mathrm{B}} = i\int_0^T \langle n(\boldsymbol{R}(t))|\dot{n}(\boldsymbol{R}(t))\rangle\,dt = i\oint_C \langle n|\nabla_{\boldsymbol{R}} n\rangle\cdot d\boldsymbol{R}.$$

Величина

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{R}) = i\langle n(\boldsymbol{R})|\nabla_{\boldsymbol{R}} n(\boldsymbol{R})\rangle$$

называется *калибровочным потенциалом Берри*. При фазовом преобразовании собственных состояний

$$|n(\boldsymbol{R})\rangle \to e^{i\chi(\boldsymbol{R})}|n(\boldsymbol{R})\rangle$$

он трансформируется как

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} - \nabla_{\boldsymbol{R}}\chi,$$

что полностью аналогично калибровочному потенциалу электродинамики.

Физически наблюдаемой величиной является не сам потенциал, а его кривизна

$$\mathcal{F} = \nabla_{\boldsymbol{R}} \times \mathcal{A},$$

которая инвариантна относительно калибровочных преобразований. Для замкнутого контура C фаза Берри выражается через поток этой кривизны:

$$\gamma_{\mathrm{B}} = \int_S \mathcal{F}\cdot d\boldsymbol{S},$$

где S — поверхность, натянутая на контур C в пространстве параметров.

Таким образом, геометрическая фаза определяется исключительно геометрией пути в пространстве параметров и не зависит от скорости его прохождения.

Цель: Построить измеримый протокол для фазы Берри спина $\frac{1}{2}$ в медленно меняющемся магнитном поле, *показать, что геометрическая фаза является следствием калибровочной структуры пространства собственных состояний*, отделить её от динамической фазы и численно проверить условия адиабатичности.

1. **Два пути в пространстве параметров: одинаковая динамика, разная геометрия**

   Рассмотрите магнитное поле фиксированного модуля B_0 с направлением

   $$\boldsymbol{n}(t) = \frac{\boldsymbol{B}(t)}{B_0}, \qquad |\boldsymbol{n}(t)| = 1,$$

   и гамильтониан

   $$H(t) = -\gamma B_0\, \boldsymbol{n}(t) \cdot \boldsymbol{S}.$$

   Постройте *две* циклические эволюции $\boldsymbol{n}_A(t)$ и $\boldsymbol{n}_B(t)$ на сфере направлений так, чтобы

   (a) телесные углы $\Omega_A \neq \Omega_B$ различались;

   (b) при этом динамическая фаза совпадала:

   $$\int_0^T E_0(t)\, dt \;\text{ одинакова для путей } A \text{ и } B.$$

   Замечание. Можно взять два конуса с разными θ и подобрать времена так, чтобы $\int_0^T |B(t)|\, dt$ совпало (или зафиксировать B_0 и одинаковое T).

2. **Интерференционный протокол**

   Рассмотрите «рамзей-подобный» протокол для двухуровневой системы (спина):

   (a) подготовить суперпозицию двух собственных состояний $H(0)$;

   (b) в одной ветви (плече интерферометра) реализовать путь A, в другой — путь B;

   (c) в конце сделать проекцию на исходный базис и измерить интерференционный сигнал.

   Сформулируйте, как наблюдаемая фаза интерференции зависит от

   $$\Delta\gamma = \gamma_B(A) - \gamma_B(B).$$

   Поясните, почему *именно разность* геометрических фаз является физически наблюдаемой, а «абсолютная» фаза зависит от выбора калибровки собственных векторов.

3. **Калибровочная структура: связь Берри и «магнитный монополь» в пространстве параметров**

   Определите калибровочный потенциал Берри для основного состояния:

   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{n}) = i\langle 0(\boldsymbol{n})|\nabla_{\boldsymbol{n}}\,|0(\boldsymbol{n})\rangle.$$

   (a) Покажите, что при преобразовании фазового выбора $|0\rangle \to e^{i\chi(\boldsymbol{n})}|0\rangle$ потенциал меняется как $\mathcal{A} \to \mathcal{A} - \nabla_{\boldsymbol{n}}\chi$.

   (b) Вычислите кривизну (поле Берри)

   $$\mathcal{F} = \nabla_{\boldsymbol{n}} \times \mathcal{A},$$

   и интерпретируйте её как поле «монополя» в пространстве направлений $\boldsymbol{n}$.

   (c) Выберите две разные калибровки собственных состояний (например, сингулярные на северном и южном полушариях сферы направлений $\boldsymbol{n}$) и покажите, что:

   i. потенциал Берри $\mathcal{A}$ зависит от выбора калибровки;

   ii. кривизна $\mathcal{F}$ и фаза γ_{B} для замкнутого контура остаются неизменными.

4. **Численная проверка: адиабатичность и ошибка переходов**

   Реализуйте численное решение уравнения Шрёдингера

   $$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

   для путей A и B.

   (a) Постройте вероятность остаться в основном состоянии:

   $$P_0(t) = |\langle 0(t)|\psi(t)\rangle|^2.$$

   (b) Введите безразмерный параметр адиабатичности

   $$\epsilon(t) = \frac{|\langle 1(t)|\dot{H}(t)|0(t)\rangle|}{(E_1(t) - E_0(t))^2},$$

   и проверьте связь: чем меньше $\max_t \epsilon(t)$, тем ближе $P_0(T)$ к 1.

   (c) Для фиксированного пути (например, конуса) исследуйте зависимость ошибки

   $$1 - P_0(T)$$

   от периода T (логарифмический график).

5. **Извлечение геометрической фазы из численного решения**

   Численно извлеките полную фазу перекрытия

   $$\Phi_{\text{tot}} = \arg\langle\psi(0)|\psi(T)\rangle,$$

   и отделите динамическую часть

   $$\Phi_{\text{dyn}} = -\int_0^T \langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle\, dt.$$

   Определите численную оценку геометрической фазы как

   $$\Phi_{\text{geom}} = \Phi_{\text{tot}} - \Phi_{\text{dyn}},$$

   и сравните $\Phi_{\text{geom}}(A) - \Phi_{\text{geom}}(B)$ с предсказанием через телесные углы $\Omega_{A,B}$.

6. **Наблюдаемость и робастность**

   (a) Добавьте малый шум направления поля: $\boldsymbol{n}(t) \to \boldsymbol{n}(t) + \delta\boldsymbol{n}(t)$, с последующей нормировкой на единичную сферу. Проверьте, что результат зависит главным образом от геометрии контура (телесного угла), а не от деталей параметризации по времени.

   (b) Обсудите, в каком смысле геометрическая фаза «устойчива», и где эта устойчивость заканчивается (нарушение адиабатичности, пересечение вырождений).

7. **Что сдать**

   (a) Краткий теоретический вывод (1–2 страницы): интерференционный протокол, калибровка, $\Delta\gamma$ как наблюдаемая величина.

   (b) Численные графики: $P_0(t)$, $\epsilon(t)$, зависимость $1 - P_0(T)$, а также сравнение Φ_{geom} с геометрическим предсказанием.

   (c) Минимальный репозиторий `git`: код (`python`), короткий `README`, итоговый LaTeX-отчёт.

8. **Литература**

- M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. A **392**, 45 (1984).

19. Уровни Ландау: от нерелятивистских частиц к графену

Цель проекта: Изучить квантование движения заряженной частицы в однородном магнитном поле. Показать, как магнитное поле приводит к дискретному спектру (уровням Ландау), как выбор калибровки влияет на вид волновых функций, и сравнить спектр для обычных электронов и безмассовых дираковских фермионов (эффективное описание графена).

Проект связывает стандартную квантовую механику, физику конденсированного состояния и релятивистские уравнения, лежащие в основе квантовой теории поля.

Рассматривается движение частицы в плоскости (x, y) в однородном магнитном поле $\boldsymbol{B} = B\,\hat{\boldsymbol{z}}$.

1. Теоретическая часть: осцилляторная структура

В магнитном поле трансляционная инвариантность нарушается, и свободное движение частицы квантуется.

Для решения удобно использовать *калибровку Ландау*:

$$\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0).$$

1. **Гамильтониан и интегралы движения**

   Запишите гамильтониан заряженной частицы:

   $$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + (p_y - qBx)^2\right].$$

   (a) Покажите, что оператор p_y коммутирует с гамильтонианом.

   (b) Используя подстановку $\psi(x, y) = e^{ik_y y}\phi(x)$, сведите задачу к одномерному гармоническому осциллятору.

2. **Спектр уровней Ландау и вырождение**

   (a) Найдите энергетический спектр:

   $$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad \omega_c = \frac{|q|B}{m}.$$

   (b) Определите положение центра осциллятора x_0.

   (c) Объясните физический смысл бесконечного вырождения уровней и его связь с трансляционной симметрией вдоль оси y.

3. **Релятивистский случай: безмассовые фермионы Дирака (графен)**

   Рассмотрите уравнение Дирака для безмассовых частиц в магнитном поле, которое эффективно описывает электроны в графене:

   $$H = v_F\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}).$$

   (a) Покажите, что спектр уровней Ландау имеет вид

   $$E_n = \pm v_F\sqrt{2|q|B\hbar\, n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (b) Объясните качественное отличие этого спектра от нерелятивистского случая.

2. Практическая часть: визуализация и плотность состояний

Цель — наглядно увидеть уровни Ландау и их физические последствия.

1. **Волновые функции**

   Постройте плотность вероятности $|\psi(x, y)|^2$ для первых нескольких уровней Ландау.

   (a) Покажите, как положение максимума зависит от волнового вектора k_y.

   (b) Проиллюстрируйте локализацию состояний в магнитном поле.

2. **Сравнение спектров**

   Постройте зависимости энергии $E_n(B)$ для:

   (a) нерелятивистского электрона;

   (b) безмассового фермиона Дирака (графен).

   Подчеркните различие линейной и корневой зависимости от B.

3. **Плотность состояний (DOS)**

   Смоделируйте плотность состояний, заменив δ-пики уровней Ландау узкими гауссианами (эффект уширения уровней).

   (a) Постройте DOS для разных значений B.

   (b) Покажите, как дискретная структура исчезает при $B \to 0$.

3. Обсуждение и связь с квантовой теорией поля

1. **Квантовый эффект Холла**

   Объясните, как наличие щели между уровнями Ландау приводит к появлению плато холловской проводимости. Какую роль играет вырождение уровней?

2. **Магнитная длина**

   Введите магнитную длину

   $$\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar}{|q|B}}.$$

   Обсудите её физический смысл и роль как фундаментального масштаба в задачах со сильными магнитными полями (графен, нейтронные звёзды, КТП в сильных полях).

3. **Нулевой уровень и топология**

   В случае графена существует уровень с энергией $E = 0$. Обсудите его связь с киральной симметрией, спектральной асимметрией и топологическими свойствами системы.

4. Что сдать

1. Вывод уровней Ландау для уравнения Шрёдингера и уравнения Дирака.
2. Графики волновых функций и спектров.
3. Численную модель плотности состояний.

Литература

- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика* (§112).
- A. H. Castro Neto et al., *The electronic properties of graphene*, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
- D. Tong, *Lectures on the Quantum Hall Effect*, arXiv:1606.06687.

20. Эффект Аронова–Бома и калибровочная инвариантность

Цель проекта: Понять, почему в квантовой механике *калибровочный потенциал* $\boldsymbol{A}$ является физически значимой величиной, несмотря на то что классическая сила зависит только от магнитного поля $\boldsymbol{B}$. Показать, что эффект Аронова–Бома является *топологическим* и наблюдается как сдвиг интерференционной картины.

Рассматривается интерференция электронов в присутствии бесконечно длинного тонкого соленоида с магнитным потоком Ф, при этом

$$\boldsymbol{B} = 0 \quad \text{в области движения электронов.}$$

1. Теоретическая часть: фаза и калибровочный потенциал

В классической электродинамике частица чувствует только локальное поле $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. В квантовой механике фазовая структура волновой функции делает векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ наблюдаемым.

1. **Уравнение Шрёдингера с векторным потенциалом**

   Рассмотрите уравнение Шрёдингера для частицы заряда q:

   $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi.$$

   Поясните, почему даже при $\boldsymbol{B} = 0$ потенциал $\boldsymbol{A}$ может влиять на фазу волновой функции.

2. **Фазовый множитель**

   Пусть $\psi_0(\boldsymbol{r}, t)$ — решение уравнения Шрёдингера при $\boldsymbol{A} = 0$. Покажите, что при ненулевом $\boldsymbol{A}$ решение можно записать в виде

   $$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \exp\left(\frac{iq}{\hbar} \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}\right) \psi_0(\boldsymbol{r}, t),$$

   где интеграл берётся вдоль траектории частицы.

3. **Разность фаз в интерферометре**

   Рассмотрите двухщелевой эксперимент. Пусть электрон проходит по двум траекториям C_1 и C_2, охватывающим соленоид.

   Покажите, что разность фаз равна

   $$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{q\Phi}{\hbar}.$$

   Объясните, почему результат зависит только от магнитного потока Ф, а не от формы траекторий.

2. Практическая часть: моделирование интерференции

Цель — численно показать, что изменение магнитного потока приводит к сдвигу интерференционных полос.

1. **Интерференционная картина**

   Смоделируйте интенсивность на экране:

   $$I(x) = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda L} x + \frac{q\Phi}{\hbar}\right)\right],$$

где d — расстояние между щелями, L — расстояние до экрана, λ — длина волны де Бройля электронов.

Постройте $I(x)$ для нескольких значений Φ.

Выведите эту формулу.

2. **Анимация**

   Постройте анимацию, показывающую, как интерференционная картина смещается при изменении

$$\Phi \in [0,\ \Phi_0], \qquad \Phi_0 = \frac{h}{q}.$$

3. **Монте-Карло**

   Смоделируйте попадание отдельных электронов на экран:

   (a) разыграйте координаты попаданий согласно распределению $I(x)$;

   (b) постройте гистограммы для разных значений Φ;

   (c) покажите, как интерференционная картина возникает статистически.

3. Обсуждение и физический смысл

1. **Калибровочная инвариантность**

   Объясните, почему фаза волновой функции зависит от выбора калибровки, но наблюдаемая разность фаз $\Delta\varphi$ — нет.

2. **Топологический характер**

   Поясните, почему сдвиг картины периодичен по потоку с периодом Φ_0 (целое число квантов потока не наблюдаемо, важна лишь дробная часть Φ/Φ_0) и не чувствителен к локальным деформациям траекторий.

4. Что сдать

1. Теоретический вывод.
2. Анимацию интерференционной картины.
3. Минимальный `git`-репозиторий с кодом (`python`) и отчётом.

Литература

- Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).